Sea $G = S_d$

Hoy: (1) ¿Cómo son los caracteres de S^λ? ✓
(2) ¿Cuál es la descomposición de M^μ como suma de S^λ's?

Idea: (1) Calcularemos el carácter de M^λ $\forall \lambda$
(2) Por ideas de funciones simétricas podremos descomponer ese carácter como suma de los de las S^λ's usando inducción descendente en $\leqslant$ de particiones.

Probaremos:

$G = S_d$

Teorema (Fórmula de Frobenius para el carácter de S^λ)

$$\chi_{S^\lambda}(g) = \chi_{S^\lambda}(C) \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots 0)$$

Suponga que la clase de conjugación C consiste de permutaciones con $(n_1, n_2, \ldots, n_d)$

n_1 1-ciclos
n_2 2-ciclos
$\vdots$
n_d d-ciclos

$$P_C(x_1, \ldots, x_k) := (x_1 + \cdots + x_k)^{n_1} (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{n_2} \cdots (x_1^d + \cdots + x_k^d)^{n_d}$$

$$\boxed{\chi_{S^\lambda}(C) = [\Delta \cdot P_C]_{\ell(\lambda)}}$$

donde (1) $\Delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$

(2) $\ell(\lambda) = (\lambda_1 + k - 1, \ldots, \lambda_{k-2} + 2, \lambda_{k-1} + 1, \lambda_k)$

Teorema: [Regla de Young]

$\forall \mu$

$$\left[M^{\overset{\text{contenido}}{\mu}} = \bigoplus_{\lambda \geq \mu} \left(S^{\lambda}\right)^{\oplus K_{\lambda\mu}} \right]$$

#'s de Kostka

donde $K_{\lambda\mu}$ = # de maneras de llenar el diagrama de Ferrers de λ con contenido μ

$$\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_s)$$

μ_1 1's
μ_2 2's
μ_3 3's

de tal manera que la tabla resultante sea semi-standard (i.e. estrictamente creciente en columnas y no decreciente en filas)

Ejemplo: $M^{(3,2)} \overset{?}{=}$

$\mu = (3,2)$ $\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \end{matrix}$ ¿Qué particiones de 5 puedo llenar de forma semistandard con esto?

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

$$M^{(3,2)} = S^{(5)} \oplus S^{(4,1)} \oplus \boxed{S^{(3,2)}}$$

$\mu = (2,2,1)$ $\qquad \lambda = (4,1)$ $\qquad K_{\lambda\mu} \overset{?}{=} 2$

$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & \end{matrix}$

$$M^{(2,2,1)} = S^{(4,1)\oplus 2} \oplus \cdots$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$S^{(3,2)}$ $\qquad S_5$ — $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$

$(e - 1)$ $\quad 5$

(12) — 10 $\quad 1$

$\lambda = (3,2)$ $\qquad (123)$ — 20 $\quad -1$ $\qquad (1, 2)$, $\; n_1 = 1,\; n_2 = 2$

$[(12)(34) —]^{(5)}$ 15 $\quad 1$

$\ell(\lambda) = (4, 2)$ $\qquad (1234)$ — 30 $\quad -1$

(12345) — 24 $\quad 0$

$\boxed{(123)(45) — 20 \quad 1}$

$$P_c = (x_1+x_2)^1 \cdot (x_1^2+x_2^2)^2 \,(\quad)^0 \cdots$$

$$P_c = (x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)^2 = \underbrace{[x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4]}_{F}\underline{(x_1+x_2)}$$

$$\Delta = \underline{(x_1 - x_2)}$$

$$[\Delta\cdot P_c]_{(4,2)} = [\Delta \cdot P_c]_{(4,2)} = 1 \leftarrow \chi^{((12)(34))}_{S^{(3,2)}}$$

$$2x_1^4x_2^2 - x_2^2x_1^4 = 1$$

(12) $\qquad n_1 = 3, \quad n_2 = 1$

$$[(x_1-x_2)(x_1+x_2)^3(x_1^2+x_2^2)]_{(4,2)} =$$

$(4,0)$ $\qquad (2,2)$

$$[(x_1-x_2)(x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3)(x_1^2+x_2^2)]_{(4,2)} =$$

$$x_1^4x_2^2 + 3x_1^4x_2^2 - 3x_1^4x_2^2 = 1.$$

$n_1 = 0$
$n_2 = 1 \qquad n_3 = 1$

$(123)(45)$

$$P_C = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^3 + x_2^3)$$

$$[\Delta \cdot P_C]_{(4,2)} = (x_1 - x_2) P_C .$$

$$[(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)]_{(1,2)}$$

$$x_1 x_2^2 \longmapsto 1 \checkmark$$

* *Ejercicio.* $\dim(S^\lambda) = \chi(e)$ luego uno puede calcular la dim S^λ mediante la formula de Frob. Demuestre el hook length formula.

Lema: El caracter de M^λ es:

$$\chi_{M^\lambda}(C) = \sum_{r_{pj}} \prod_{j=1}^{d} \binom{n_j}{r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{kj}}$$

donde los r_{pj} son matrices enteras que satisfacen:

$$(1) \quad \sum_j j \cdot r_{pj} = \lambda_p \quad \forall p$$

$$(2) \quad \sum_p r_{pj} = n_j \quad \forall j$$

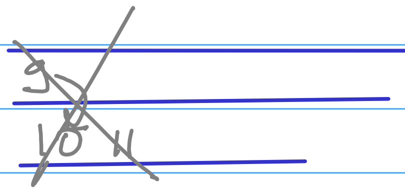
Dem: Usaremos que M^λ es una representación por permutaciones.

$$\chi_{M^\lambda}(g) = Tr\left(\rho_{M_\lambda}(g)\right) = \text{\# de tabloides fijos mediante } g.$$

Ejemplo:

$$g = \left[\overset{2}{(1)}\overset{2}{(2)}\overset{2}{(3)}\overset{1}{(4)}\;\boxed{\underset{(6,5)}{\overset{1}{(56)}}\overset{2}{(78)}}\;\overset{1}{(9,10,11)}\right]$$

¿Cuántos tabloides quedan fijos por g?



Todo ciclo debe tener todos sus elts en el mismo renglón!

$(4)(56)(9,10,11)] \leftarrow$ suman 6 ✓

$(78)(1)(2)(3)] \leftarrow$ suman 5 ✓

¿Qué asignaciones tengo?

$r(p,j) =$ # j-ciclos que van al renglón p.

$$\sum_j r(p,j)\cdot j = \lambda_p$$

$$\sum_p r(p,j) = n_j$$

luego el número total de tabloides fijos es

$$= \sum_{r_{pj}} \left(\prod_{j=1}^{d} \left[\binom{n_j}{r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{kj}} \right] \right)$$

longitud j

una secuencia de k multiconjuntos de tamaños especificados nos determina un único tabloide.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (12) & (34) & (56) & (78) \end{array} \right]$$

2 al renglón 1

2 al renglón 2

$$\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \binom{4}{2,\,2}$$

1 2 3 4	4 3 2 1
5 6 7 8	5 6 7 8

(12) (34)

(56) (78)