Hoy: Construcción de las representaciones irreducibles de S_n (parte 1)

- Para cualquier grupo G hay una biyección entre las clases de conjugación de G y las ireps de G.
  "En general no conocemos una manera de explícitamente enviar una clase de conjugación a una irep."
- Para S_n las clases de conjugación están en biyección con las particiones de n. Dada una partición λ queremos construir una irep S_λ.

Hacemos esto en dos pasos:

$$\lambda \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \underbrace{M_\lambda}$$

Representación "Combinatoria"
S_n actúa en un conjunto X especial
$M_\lambda := \mathbb{C}X$

(2) M_λ no es irreducible así que intentaremos descomponerla en ireps.

(2.1) Definiremos un orden $\leq$ total en particiones y mostraremos

(2.2)
$$M_\lambda = \left(\bigoplus_{\eta \lneq \lambda} (S^\eta)^{\oplus m(\eta, M_\lambda)} \right) \oplus \underbrace{1 \cdot S^\lambda}_{\text{irred. adicional}}$$

Descubriremos $S^\lambda \subseteq M_\lambda$

Sea n un entero positivo

Def: Una partición λ de n es una sucesión $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ con:

(i) $\lambda_i \in \mathbb{N}$

(ii) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$

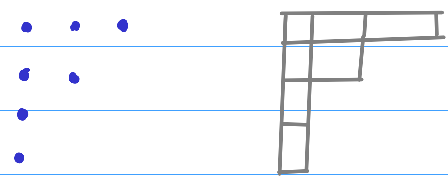
(iii) $\sum_{\lambda_i} = n$

Ej: $p(3)$: (3)

$(2, 1)$

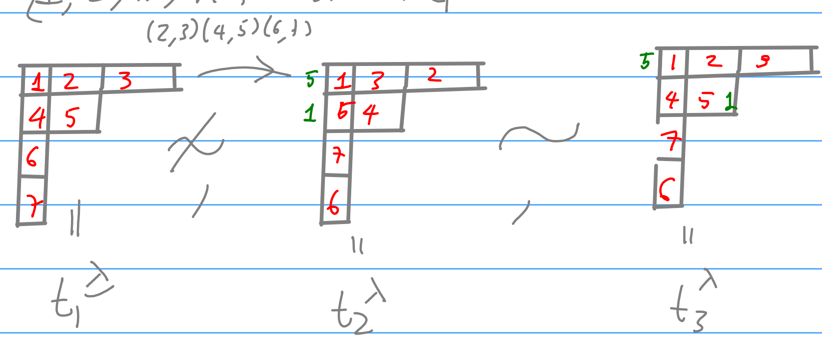
$(1, 1, 1)$

Def: El diagrama de Ferrers de λ es $\lambda = (3, 2, 1, 1)$



$(3, 2, 1, 1) \vdash 7$

Def: Los tableaux de forma λ son formas de llenar el diagrama de ferrers de λ con los números $\{1, 2, \dots, n\}$ sin repeticiones



Ej: $(1, 5)$

$\{1\,3\,2\} = \{1\,2\,3\}$

$\{5\,4\} = \{4\,5\}$

$\vdots$

$\{5\,3\,2\} = \{5\,2\,3\}$

$\{1\,4\} = \{4\,1\}$

$(t_2^\lambda)_{2,2} = 4$

$(t_2^\lambda)_{3,1} = 7, \dots$

Hay $n!$ tableaux de forma λ

Def: $t_1^\lambda \sim t_2^\lambda \iff$ Para cada fila i

$\{\text{elementos de } t_1^\lambda \text{ en fila } i\} = \{\text{elementos de } t_2^\lambda \text{ en fila } i\}$

Los tabloides de forma λ son las clases de equivalencia de $\sim$. $\{t^\lambda\}$

Cuántos tabloides hay ?

Obs: [S_n actúa sobre los tableaux de forma λ] transitivamente. Esta acción desciende a los tabloides.

$$\left[\ \pi \in S_n,\quad t^\lambda \in \text{tableaux}(\lambda) \qquad \pi(t^\lambda)_{ij} := \pi(t^\lambda_{ij})\ \right]$$

$$\underbrace{t_1^\lambda \sim t_2^\lambda}\implies \pi(t_1^\lambda) \sim \pi(t_2^\lambda)$$

Tome una fila i y $\pi \in S_n$

$$\{\pi(t_1^\lambda)_{ij}\} = \{\pi(t^\lambda_{1\,ij})\} = \pi(\{t^\lambda_{1\,ij}\})$$

$$\underset{\text{pf } t_1^\lambda \sim t_2^\lambda}{=} \pi(\{t^\lambda_{2\,ij}\}) = \{\pi(t^\lambda_{2\,ij})_{:j}\} = \{\pi(t_2^\lambda)_{ij} : j\}$$

Acción de $\underline{S_n}$ en tabloides es transitiva ($\forall x \in X\ \exists g \in G \mid g(x_0) = x$)

$$\left(G \curvearrowright X \text{ transitiva y } \underset{\sim}{x_0} \in X \qquad \left[G/\mathrm{Stab}(x_0) \xrightarrow[\text{biyección}]{\cong} X\right)\right.$$

$$G \xrightarrow{\varphi} X$$
$$g \longmapsto g(x_0)$$
$$G/\{g \in G : g(x_0) = x_0\} \cong$$

Fijemos $\{t^\lambda\}$

$$\mathrm{Stab}(\{t^\lambda\}) = \{g \in S_n : g(\{t^\lambda\}) = \{t^\lambda\}\}$$

$$\cong\ \left[S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{6\}} \times S_{\{7\}}\right]$$

$$\begin{array}{l}\overline{\underline{1\ 2\ 3}}\\ \underline{4\ 5}\\ \underline{6}\\ \underline{7}\end{array} = \left\{\begin{array}{l}\{1\,|\,2\,|\,3\}\\ \{4\,|\,5\}\\ \{6\}\\ \{7\}\end{array}\right\}$$

Notación para la clase de equiv.

$$\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!}$$

$$\left|\frac{S_n}{S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots \times S_{\lambda_k}}\right| \cong X$$

Número de tabloides de forma λ.

$$\binom{n}{\lambda_1 \ldots \lambda_k} := \frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_k!} = \binom{n}{\lambda_1}\binom{n-\lambda_1}{\lambda_2}\binom{n-\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3}\cdots$$

Recuerde que, si G actúa en X de forma... (la representación de permutaciones asociada)

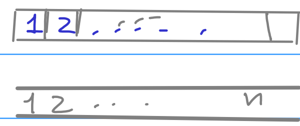
$$\mathbb{C}X = \langle u_x : x \in X \rangle \leftarrow \text{rep de } G.$$

$$g(u_x) = u_{g(x)}$$

Def: La representación $M^\lambda = \mathbb{C}X$ donde $X = \{$ tabloides de forma $\lambda \}$.

Ejemplos.

(1) $\lambda = (n)$



$\leftarrow$ $n!$ tableaux

$\leftarrow$ 1 solo tabloide

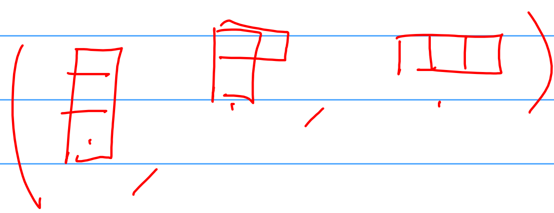
$g(u_{\overline{12\cdots}}) = u_{\overline{12\cdots}}$

así que $M^{(n)} = \text{trivial} \checkmark = S^{(n)}$

(2) $\lambda = (1\,1\,1 \ldots 1)$

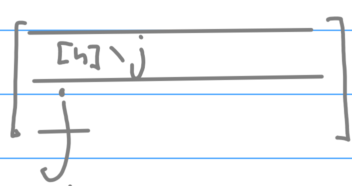
$\leftarrow$ $n!$ tableaux

$\leftarrow$ $n!$ tabloides.



$$[M^{(1,1,\ldots,1)} = \mathbb{C}S_n] = \bigoplus_{\lambda \neq (1,\ldots,1)} (S^\lambda)^{\dim(S_\lambda)} \oplus \underbrace{S^{(1,1,\ldots,1)}}_{\text{sgn}}$$

(3) $\lambda = (n-1, 1)$ $\qquad \dfrac{n!}{(n-1)!\,1!} = n$



$\leftarrow$ n tabloides

$$g\left(\frac{\overline{[n]\setminus j}}{j}\right) = \left(\frac{\overline{[n]\setminus g(j)}}{g(j)}\right)$$

$$M^{(n-1,1)} = \left\langle \begin{array}{l}\text{Representación de permutación} \\ \text{de } S_n \text{ en } \mathbb{C}^n \\ e_i \mapsto \dfrac{\overline{[n]\setminus i}}{i}\end{array} \right\rangle$$

$$M^{(n-1,1)} = \text{triv} \oplus U \sim S^{(n-1,1)}$$