Hoy: Dada una partición λ, la clase pasada construimos M^λ una rep. combinatoria.
M^λ es generalmente reducible. Identificaremos una subrepresentación $S^\lambda \subseteq M^\lambda$ ← Aparecen mucho en la naturaleza

↑ módulo de Young.

que cumple:

(1) S^λ es irreducible

(2) S^λ aparece con mult 1 en M^λ

(3) $S^\lambda \cong S^\mu \iff \lambda = \mu$.

Así que $\left[\{S^\lambda : \lambda \vdash n\}\right.$ son las irreps de $\left.S_n.\right]$

Recapitulando... ¿Qué es M^λ? $t_1 \sim t_2 \iff$ Conjuntos de filas coinciden.

$$M^\lambda = \left\{ \text{tabloides de forma } \lambda \right\} = \left\{ \text{tableaux de forma } \lambda \right\} / \sim$$

$\lambda = (3,2,1) \vdash 6$

$$\begin{array}{l} \underline{1\ 2\ 3} \\ \underline{4\ 5} \\ \underline{6} \end{array} \xleftarrow[\text{en filas}]{\text{ignorando orden}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array} = t$$

↑ tabloide $\{t\}$

$$\pi(t)_{ij} = \pi(t_{ij})$$

Def: Si t es un tableau, este define dos subgrupos de S_n:

R_t — Estabilizador de filas $\qquad R_t = S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{6\}} \subseteq S_{\{1,2,3,4,5,6\}}$

C_t — Estabilizador de columnas $\qquad C_t = S_{\{1,5,6\}} \times S_{\{2,4\}} \times S_{\{3\}}$

Def: Si t es un tableau, definimos $K_t \in \mathbb{C}S_n$ así

$$K_t = \sum_{g \in \underbrace{C_t}} \operatorname{sgn}(g)\, e_g \in \mathbb{C}S_n$$

tableau

$\leftarrow$ estabilizador de columnas.

Def: Para cada tableau q con $sh(q) = \lambda$ defina

$$\boxed{u_q := K_q(\{q\}) \in M^\lambda}$$

pol.tabloide

$$S^\lambda := \langle u_q : q \text{ es tableau con } sh(q) = \lambda \rangle$$

Ejemplo: $\lambda = (n-1, 1)$

tableaux: $n!$

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline n \\ \cline{1-1}\end{array}}_{q}, \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 \ldots & n-2, & n \\ n-1 \end{array}, \ldots$$

$M^{(n-1,1)}$ = tabloides: $\dfrac{\overline{1\ 2 \ldots \quad n-1}}{n}, \ldots, \dfrac{\overline{[n] \setminus \{j\}}}{j}$

$\underline{M^{(n-1,1)}}$ es S_n actuando en $\mathbb{C}^n$ de la forma obvia

$$C_q = \langle (1n) \rangle = \{\varepsilon, (1,n)\}$$

$$\left[K_q = \operatorname{sgn}(\varepsilon)\, e_\varepsilon + \operatorname{sgn}(1n)\, e_{(1n)} \right]$$

$$K_q = e_\varepsilon - e_{(1n)}$$

$$u_q := K_q(\{q\}) = (e_\varepsilon - e_{(1n)}) \left(\frac{\overline{1 \ldots \quad n-1}}{\underline{n}} \right)$$

$$= \left[\begin{array}{c} \hline 1 \; 2 \; \cdots \; n-1 \\ \hline \underline{n} \end{array} \; - \; \begin{array}{c} \hline n \; 2 \; \cdots \; n-1 \\ \hline \underline{1} \end{array} \right]$$

politabloide

$$= \underline{n} - \underline{1}$$

$$\left[S^{\lambda} = \left\langle \underline{j} - \underline{1} \; : \; j \in \{2, \ldots, n\} \right\rangle \right]$$

$$S^{(n-1,1)} \subseteq M^{(n-1,1)}$$

Ejercicio. Sea G un grupo finito y suponga que G actúa en X de manera transitiva y sea $x_0 \in X$. Demuestre que

$$\mathbb{C}X \cong \operatorname{Ind}_H^G (\operatorname{triv}_H)$$

como reps de G

donde $H = \operatorname{Stab}(x_0)$

En particular, si $G = S_n$ y X es el conjunto de tabloides de forma λ entonces el ejercicio implica que si $x_0 = t$ (un tableau cualquiera)

$$\mathbb{C}X \underset{\text{por def}}{=} M^{\lambda} \underset{\text{Ej}}{\cong} \operatorname{Ind}_{R_t}^{S_n} (\operatorname{triv}_{R_t})$$

Def: V es un G-módulo cíclico si existe $\vec{v} \in V$, $(\mathbb{C}G)\cdot\vec{v} = [V]$ $\quad e_g \cdot \vec{v} := \rho(g)(\vec{v})$

Lema: $S^\lambda \subseteq M^\lambda$ es un S_n-submódulo cíclico generado por cualquier u_q, q tableau con $sh(q) = \lambda$.

Dem: Mostremos que $\boxed{\forall\, \pi \in S_n \quad \left(\pi(u_q) = u_{\pi q}\right)}$

Af: $\forall \pi \in S_n\ \forall q$ tableau $\quad C_{\pi q} = \pi\, C_q\, \pi^{-1}$

Dem: Sea $\langle q \rangle$ un "tabloide por columnas"

$\left\{ \begin{matrix} \text{tabloides} \\ \text{por columnas} \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \\ 3 & \end{vmatrix}$ $\quad (2,1,1)$

$$\ast \left| \begin{aligned} g \in C_{\pi q} &\iff g\cdot\langle \pi q \rangle = \langle \pi q \rangle \iff g\,\pi\langle q \rangle = \pi \langle q \rangle \\ &\iff \pi^{-1} g\, \pi \langle q \rangle = \langle q \rangle \iff \pi^{-1} g\, \pi \in C_q \end{aligned} \right.$$

$$\left[u_{\pi q} \overset{?}{:=} K_{\pi q} \{\pi q\} = \sum_{g \in C_{\pi q}} sgn(g)\, e_g\, \{\pi q\} \right.$$

$$\overset{\ast}{=} \sum_{g \in C_q} sgn(\pi g \pi^{-1})\, e_{\pi g \pi^{-1}} \{\pi q\}$$

$$= \sum_{g \in C_q} sgn(g)\, e_{\pi g} \{\pi^{-1}\pi q\} = e_\pi \Big(\underbrace{\sum_{g \in C_q} sgn(g)\, e_g \{q\}}_{u_q} \Big)$$

$$= \pi(u_q)$$

Af: Tome q tableau cualquiera con $sh(q) = \lambda$

$$\mathbb{C}S_n(u_q) \supseteq \{ e_\pi(u_q) : \pi \in S_n \}$$

$$\{ \pi(u_q) : \pi \in S_n \}$$

(a)

$$\{ u_{\pi q} : \pi \in S_n \} = \{ u_{q'} : q' \text{ es tableau de forma } \lambda \}$$

S_n actúa transitivamente en tableaux de $sh\,q$

así que $\mathbb{C} S_n (u_q) = S^{\lambda}$.

Próxima clase...

$\boxed{\text{Ejercicio:}}$ Con $n = 5$ calcule $S^{(3,2)}$

$$S^{\begin{smallmatrix}\square&\square&\square\\ \bullet&\bullet\end{smallmatrix}} \overset{?}{=}$$

$$\dim\left(M^{\begin{smallmatrix}\square&\square&\square\\ \bullet&\bullet\end{smallmatrix}}\right) = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5.4}{2} = 10$$

$$\binom{5}{2} = 10$$