

Hoy: Dada una partición λ , la clase parada construye M^λ una rep. combinatoria.

M^λ es generalmente reducible. **Identificaremos**

una subrepresentación $S^\lambda \subseteq M^\lambda$ ← Aparece mucho en la naturaleza
 ↑ módulo de Young.

que cumple:

(1) S^λ es irreducible

(2) S^λ aparece con múlt 1 en M^λ

(3) $S^\lambda \cong S^\mu \iff \lambda = \mu$.

Así que $\{S^\lambda : \lambda \vdash n\}$ son las reps de S_n .

Recapitulando... ¿Qué es M^λ ?

$t_1 \sim t_2 \iff$ Conjuntos de filas coinciden.

$$M^\lambda = \left\{ \begin{array}{c} \text{tabloides de forma} \\ \lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{tableaux de forma} \\ \lambda \end{array} \right\}$$

$\lambda = (3, 2, 1) + 6$

1	2	3
4	5	
6		

↑
tabloide $\{t\}$

$$\pi(t)_{ij} = \pi(t_{ij})$$

← ignora los ord en filas

1	2	3
5	4	
6		

||
t

Def. Si t es un tableau, este define dos subgrupos de S_n :

R_t — Estabilizador de filas

$$R_t = S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{6\}}$$

C_t — Estabilizador de columnas

$$C_t = S_{\{1,5,6\}} \times S_{\{2,4\}} \times S_{\{3\}}$$

Def: Si t es un tableau de primos, $K_t \in \mathbb{C} S_n$ así

$$K_t = \sum_{g \in C_t} \text{sgn}(g) e_g \in \mathbb{C} S_n$$

tableau \rightarrow K_t

C_t \leftarrow estabilizador de columnas.

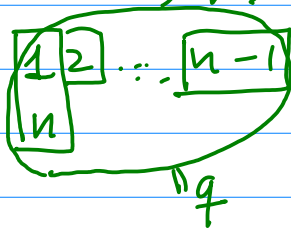
Def: Para cada tableau q con $\text{sh}(q) = \lambda$ defina

$$u_q := K_q(\{q\}) \in M^\lambda$$

pol. tabloides $S^\lambda := \langle u_q : q \text{ es tableau con } \text{sh}(q) = \lambda \rangle$

Ejemplo: $\lambda = (n-1, 1)$

tableaux: $n!$



$1 \ 2 \ \dots \ n-2, n$
 $n-1, \dots$

$M^{(n-1,1)} =$ tabloides: $\frac{1 \ 2 \ \dots \ n-1}{n}$, \dots , $\frac{[n] \setminus \{j\}}{j}$

$M^{(n-1,1)}$ es S_n actuando en \mathbb{C}^n de la manera obvia

$$C_q = \langle (1n) \rangle = \{ \varepsilon, (1n) \}$$

$$K_q = \text{sgn}(\varepsilon) e_\varepsilon + \text{sgn}(1n) e_{(1n)}$$

$$K_q = e_\varepsilon - e_{(1n)}$$

$$u_q := K_q(\{q\}) = (e_\varepsilon - e_{(1n)}) \left(\frac{1 \ \dots \ n-1}{n} \right)$$

$$= \left[\frac{1 \ 2 \ \dots \ n-1}{n} - \frac{n \ 2 \ \dots \ n-1}{1} \right]$$

$$= \frac{n}{n} - \frac{1}{1} \rightarrow \text{Politableide}$$

$$[S^\lambda = \langle j^{-1} : j \in \{2, \dots, n\} \rangle]$$

$$S^{(n-1, 1)} \subseteq M^{(n-1, 1)}$$

Ejercicio: Sea G un grupo finito y suponga que G actúa en X de manera transitiva y sea $x_0 \in X$.
Demuestre que

$$\mathbb{C}X \cong \text{Ind}_H^G (\text{tr}_H)$$

↑
como reps de G

donde $H = \text{Stab}(x_0)$

En particular, si $G = S_n$ y X es el conjunto de tabloides de forma λ entonces el ejercicio implica que si $x_0 = t$ (un tabloide cualquiera)

$$\mathbb{C}X \cong M^\lambda \cong \text{Ind}_{R_t}^{S_n} (\text{tr}_{R_t})$$

↑
p-obj

↑
 E_j

Def: V es un g -módulo cíclico si existe $\vec{v} \in V$,
 $(\mathbb{C}g) \cdot \vec{v} = [V]$ $e_g \cdot \vec{v} := S(g)(\vec{v})$

Lema: $S^\lambda \subseteq M^\lambda$ es un S_n -submódulo cíclico
 generado por cualquier u_q , q tableau con $sh(q) = \lambda$.

Dem: Mostremos que $\forall \pi \in S_n \quad (\pi(u_q) = u_{\pi q})$

Af: $\forall \pi \in S_n \quad \forall q \text{ tableau} \quad C_{\pi q} = \pi C_q \pi^{-1}$

$\{ \text{tabloides por columnas} \} = \left| \begin{array}{c|c} 1 & q \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \end{array} \right|$
 $(2, 1, 1)$

Dem: Sea $\langle q \rangle$ un "tabloide por columnas"

* $\left\{ \begin{array}{l} g \in C_{\pi q} \Leftrightarrow g \cdot \langle \pi q \rangle = \langle \pi q \rangle \Leftrightarrow g \pi \langle q \rangle = \pi \langle q \rangle \\ \Leftrightarrow \pi^{-1} g \pi \langle q \rangle = \langle q \rangle \Leftrightarrow \pi^{-1} g \pi \in C_q \end{array} \right.$

$[u_{\pi q} := K_{\pi q} \{ \pi q \} = \sum_{g \in C_{\pi q}} sgn(g) e_g \{ \pi q \}]$

$\stackrel{*}{=} \sum_{g \in C_q} sgn(\pi g \pi^{-1}) e_{\pi g \pi^{-1}} \{ \pi q \}$

$= \sum_{g \in C_q} sgn(g) e_{\pi g} \{ \pi^{-1} \pi q \} = e_\pi \left(\underbrace{\sum_{g \in C_q} sgn(g) e_g \{ q \}}_{u_q} \right)$

$= \pi(u_q)$

Af: Tome q tableau cualquiera con $sh(q) = \lambda$

$(S_n(u_q) \cong \{ e_\pi(u_q) : \pi \in S_n \})$

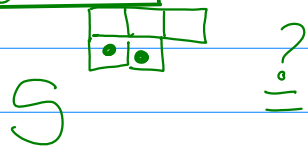
$\cong \{ \pi(u_q) : \pi \in S_n \}$

$\cong \{ u_{q'} : q' \text{ es tableau de } sh \lambda \}$

S_n actúa de manera transitiva en tabloides de $sh \lambda$

así que $\zeta S_n(u_q) = S^\lambda$.

Ejercicio: *Para poder clasificar...* Con $n=5$ calcule $S^{(3,2)}$



$$dn(M \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \bullet & \bullet & \\ \hline \end{array}) = \frac{5!}{3! 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$\binom{5}{2} = 10$