Hoy: Mostraremos que $S^\lambda \subseteq M^\lambda$ es una rep irreducible que aparece con mult 1 en M^λ y ($\{S^\lambda : \lambda \vdash n\}$ son irreps de S_n.)

$\exists \lambda : \lambda \vdash n$ y $sh(t) = \lambda$

Para cada "tableau t de S_n" definimos

$$K_t := \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\, e_\sigma \in \mathbb{C} S_n$$

estabilizador de columnas

Usamos los K_t para construir $S^\lambda \subseteq M^\lambda$ así:

Def: $S^\lambda = \langle K_q \cdot \underbrace{\{q\}}_{\text{tabloides}} : q \text{ es tableau con } sh(q) = \lambda \rangle \subseteq M^\lambda$

$K_q \cdot \{q\} \overset{!!}{=} u_q$

de clase anterior...

Teorema: $S^\lambda \subseteq M^\lambda$ es una subrepresentación y más aún es un $\mathbb{C}S_n$ - módulo cíclico generado por cualquier u_q.

($\forall \pi \in S_n\ \forall q \in$ tableaux con $sh(q) = \lambda$ $[\pi(u_q) = u_{\pi q}]$)

Qué tipo de representación es S^λ?

(CLAVE:)

Lema: Sean q y t tableaux de S_n ($\{t\} \in M^{sh(t)}$)

Si $K_q \cdot \{t\} \neq 0 \implies sh(t) \trianglelefteq sh(q)$ y, si adicionalmente $sh(t) = sh(q)$ entonces $K_q\{t\} = \pm u_q$.

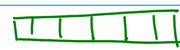
Orden de dominación de particiones

Def: Suponga que $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$

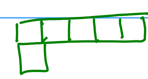
$$\lambda \succeq \mu \iff \begin{aligned} &\lambda_1 \geq \mu_1 \\ &\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2 \\ &\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Este es un orden parcial en particiones de n.

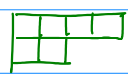
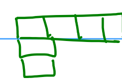
Ejemplo: $n=6$

(6) 

$\vee\!|$

$(5,1)$ 

$\leq$ $\quad$ $\geq$

 $(4,2)$ $\geq$  $(4,1,1)$

$(4,1,1) \overset{?}{\leq} (4,1,2)$

$4 \leq 4$

$5 \leq 6$

$6 \leq 6$ ✓

$(1,1,1\dots)$ 

incomparables

$(3,3)$ ✓ $(4,1,1)$

$3 \leq 4$

$6 \geq 5$

$6 = 6$

Ejercicio: (a) Dibuje el diagrama de Hasse de particiones de 6 con $\preceq$.

(b) Demuestre que el orden lexicográfico es una extensión lineal del orden de particiones.

$q = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & 2 & 7 \\ \hline b & 4 & \\ \cline{1-2} 6 & & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\qquad t = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & 7 \\ \hline 4 & 5 & 8 \\ \hline\end{array}$

$$K_q\{t\}$$

Dem:

Af 1: Si $a, b \in [n]$ con $a \neq b$ satisfacen:

(1) a, b en la misma fila de t

(2) a, b en la misma columna de q

$\Rightarrow K_q\{t\} = 0$.

Dem de Af 1: $C_q \ni (ab)$ $\qquad \langle (ab) \rangle = \{\varepsilon, (ab)\}$

$$C_q / \langle (ab) \rangle = \{ \boxed{r_1 \langle ab \rangle}, \dots, r_T \langle ab \rangle \}$$

$r_i \langle ab \rangle = \{ r_i \varepsilon, r_i (ab) \}$

$$K_q = \sum_{\sigma \in C_q} \operatorname{sgn}(\sigma)\, e_\sigma = \sum_{i=1}^{T} \left[\operatorname{sgn}(r_i)\, e_{r_i} + \operatorname{sgn}(r_i(ab)) \cdot e_{r_i(ab)} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{T} \operatorname{sgn}(r_i)\, e_{r_i} \left(e_\varepsilon - e_{(ab)} \right) \in \mathbb{C} S_n$$

$$K_q\{t\} = \sum_{i=1}^{T} \operatorname{sgn}(r_i)\, e_{r_i} \Big[\underbrace{e_\varepsilon[\{t\}] - e_{(ab)}\{t\}}_{\{t\} - \{t\} \text{ porque } a, b \text{ en la misma fila}} \Big] = 0 \in M^{sh(t)}$$

Concluimos que: Si $[K_q\{t\} \neq 0]$ entonces

(✱) para toda fila i de t los elementos de esta pertenecen a columnas distintas de q

Af 2: (✱) $\Rightarrow sh(q) \trianglerighteq sh(t)$ en orden de dominancia.

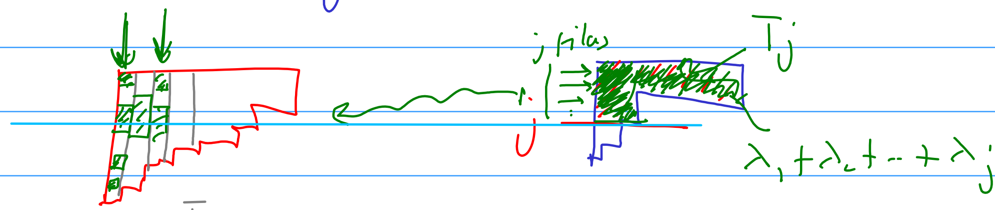
$$\overset{\mu}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 6 & 4 & 3 & 8 \\ \hline 5 & 2 & 7 \\ \cline{1-3}\end{array}} \;\; \trianglerighteq \;\; \overset{\lambda}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline\end{array}}$$

$\qquad\qquad q \qquad\qquad\qquad\qquad t$

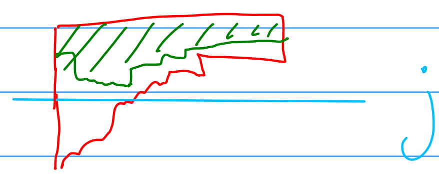
$$\mu_1 \geq \lambda_1$$

Sea T_j el conjunto de números que aparecen en las primeras j filas de t. Cuántos elementos de T_j puede contener una columna cualquiera de q? R: $\leq j$ porque si tuviera

al menos $j+1$ tendría que tener dos de alguna fila de t en T_j.



Reordenando las columnas puedo subir la parte verde columna por columna



porque cabe adentro!

$$\left[\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_j \geq \underbrace{\lambda_1+\dots+\lambda_j}_{\blacksquare}\right]$$

Af. 3: Si $sh(t) = sh(q)$ y $K_q\{t\} \neq 0$ (H) $\Longrightarrow$ (1) $\exists\, \pi^* \in C_q : \pi^*\{q\} = \{t\}$

(2) $K_q\{t\} = \pm u_q$.

Ejercicio: (a) [Demuestre que (H) $\Rightarrow$ (1)]

(b) $\exists\, q, t$ con $sh(q) = sh(t)$ y $K_q\{t\} = 0$?

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$K_q\{t\} = \sum_{\sigma\in C_q} \mathrm{sgn}(\sigma)\, e_\sigma \{\pi^* q\} = \sum_{\sigma\in C_q} \mathrm{sgn}(\sigma)\, e_{\sigma\pi^*}\{q\}$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi^*) \left(\sum_{\sigma \in C_q} \operatorname{sgn}(\sigma\pi^*)\, e_{\sigma\pi^*} \right) \{q\}$$

$$\Big\downarrow \text{ como } \pi^* \in C_q$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi^*) \left(\sum_{\sigma \in C_q} \operatorname{sgn}(\sigma)\, e_{\sigma} \right) \{q\} = \operatorname{sgn}(\pi^*)\, \kappa_q \{q\}$$

$$= \pm u_q$$