Hoy: Mostremos que $\{S^\lambda : \lambda \vdash n\}$ son las irreps de S_n.

Si $\lambda \vdash n$, definimos $M^\lambda = \mathbb{C}X$, $X = \{\{t\} : t$ es tableaux de forma $\lambda\}$

$S^\lambda = \langle u_q : q$ es tableau de forma $\lambda \rangle \subseteq M^\lambda$

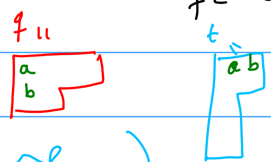
$u_q := \kappa_q\{q\}$, $\kappa_q = \sum_{\sigma \in C_q} \operatorname{sgn}(\sigma) e_\sigma \in \mathbb{C}S_n$

Teorema: (de clase -2) $S^\lambda \subseteq M^\lambda$ es un submódulo cíclico generado por cualquier u_q.

(*) **Lema:** Sean t, q tableaux de S_n

$\kappa_q\{t\} \neq 0 \Rightarrow$ (1) $sh(q) \precsim sh(t)$

(2) Si $sh(q) = sh(t) \Rightarrow$ $\kappa_q\{t\} = \pm u_q$.



$(e_\varepsilon - e_{(a,b)})$

Hoy: **Teorema 1** [Teorema del submódulo de James] Si $U \subseteq M^\lambda$ es un submódulo entonces

$S^\lambda \subseteq U$ ó $U \subseteq (S^\lambda)^\perp$

En particular S^λ es irreducible.

orden de dominancia

$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \succsim (\mu_1, \mu_2, \ldots)$
$\iff \lambda_1 \geq \mu_1$
$\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$
$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$
$\vdots$

Teorema 2: Sean λ, μ particiones de n

Si $\operatorname{Hom}_{S_n}(S^\lambda, M^\mu) \neq 0 \Rightarrow \lambda \succsim \mu$

y más aún, si $\lambda = \mu$ entonces

$\operatorname{Hom}_{S_n}(S^\lambda, M^\lambda) = \mathbb{C}$.

En particular S^λ aparece con multiplicidad uno en M^λ y $S^\lambda \cong S^\mu \iff \lambda = \mu$.

Obs: De ahí concluimos que $\{S^\lambda : \lambda \vdash n\}$ son los reps de S_n puesto que son todas distintas y hay tantas como clases de conjugación en S_n!!

En M^λ, $\langle \{t\}, \{q\} \rangle = \delta_{\{t\},\{q\}}$ es S_n-invariante.

Teorema 1 [Teorema del submódulo de James]
Si $U \subseteq M^\lambda$ es un submódulo entonces

$S^\lambda \subseteq U$ ó $U \subseteq (S^\lambda)^\perp$

En particular S^λ es irreducible.

Dem Teo 1: Sea $U \subseteq M^\lambda$ un submódulo.
Hay dos casos posibles:

(i) $\forall w \in U$ $\forall q$ tableau de forma λ $\quad K_q(w) = 0$
(ii) $\exists w \in U$ $\exists q$ tableau de forma λ $\quad K_q(w) \neq 0$

Si (ii): $w \in U \subseteq M^\lambda$

$$w = c_1\{t_1\} + \dots + c_s\{t_s\}$$

$$0 \neq K_q(w) = \sum_{i=1}^{s} c_i K_q\{t_i\} = \eta\, u_q, \quad \eta \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow \exists\ t_i$ con $sh(t_i) = sh(q) = \lambda$

$K_q\{t_i\} \neq 0$
$\pm u_q$

$\eta^{-1} u_q$ $\quad \eta \neq 0$

Como $U \subseteq M^\lambda$ es submódulo $K_q(w) \in U$

$\Rightarrow u_q \in U \Rightarrow S^\lambda \subseteq U$.

del Teo de clase -2

Si (i) $\forall w \in U$ $\forall q$ tableau con $sh(q) = \lambda$ $\quad K_q(w) = 0$

Sea $u_r \in S^\lambda$ para r tableau con $sh(r) = \lambda$

Sea $w \in U$

Af: $\langle w, u_r \rangle = 0$. Dem de af:

$$\langle w, K_r\{r\}\rangle = \langle w, \sum_{\sigma\in C_r} \mathrm{sgn}(\sigma)\, e_\sigma \{r\}\rangle =$$

$$= \sum_{\sigma\in C_r} \mathrm{sgn}(\sigma) \langle w, e_\sigma\{r\}\rangle \underset{\substack{\langle,\rangle \text{ en } M^\lambda \\ \text{es } G\text{-invte}}}{=} \sum_{\sigma\in C_r} \mathrm{sgn}(\sigma) \langle e_{\sigma^{-1}} w, \{r\}\rangle$$

$$\underset{\mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})}{=} \langle \sum_{\sigma\in C_r} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})\, e_{\sigma^{-1}} w, \{r\}\rangle$$

$$\| $$

$$\langle K_r(w), \{r\}\rangle = \langle 0, \{r\}\rangle = 0$$

$w \in (S^\lambda)^\perp$, es decir $U \subseteq (S^\lambda)^\perp$

Teorema 2: Sean λ, μ particiones de n. Si $\mathrm{Hom}_{S_n}(S^\lambda, M^\mu) \neq 0 \Rightarrow \lambda \trianglerighteq \mu$ y más aún, si $\lambda = \mu$ entonces $\mathrm{Hom}_{S_n}(S^\lambda, M^\lambda) = \mathbb{C}$.

[En particular S^λ aparece con multiplicidad uno en M^λ, $S^\lambda \cong S^\mu \Leftrightarrow \lambda = \mu$.]

Dem: Si $\theta : S^\lambda \longrightarrow M^\mu$ es un mapeo de reps

$M^\lambda = S^\lambda \oplus (S^\lambda)^\perp$ así que podemos extender θ a

$$\hat\theta : M^\lambda \longrightarrow M^\mu \qquad \underset{\underset{\mathrm{Hom}_{S_n}(M^\lambda, M^\mu)}{\cap}}{\hat\theta \neq 0} \text{ y}$$

$$u \longmapsto \begin{cases} \theta(u), & \text{si } u\in S^\lambda \\ 0, & \text{si } u \in (S^\lambda)^\perp \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} U \to W \\ \varphi(e_g \vec{v}) = e_g \varphi(w) \\ \varphi(\rho_U(g) v) = \rho_W(g)\varphi(w) \end{array}\right.$

Sea $u_q \in S^\lambda$: $\hat\theta(u_q) \neq 0$, $u_q = K_q\{q\}$

$$\underset{\hat\theta\neq 0}{0 \neq} \hat\theta(\underbrace{K_q\{q\}}_{u_q}) \underset{\hat\theta \text{ es un mapeo de reps}}{=} K_q(\underbrace{\hat\theta(\{q\})}_{\in M^\mu}) = K_q\left(\sum_{i=1}^{L} c_i\{s_i\}\right)$$

con $sh(S_i) = \mu$

$$0 \neq \sum_{i=1}^{L} c_i \underline{K_q\{S_i\}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \exists \text{ tableau } S_i \text{ con } sh(S_i) = \mu \text{ y } q \text{ tableau} \\ \text{con } sh(q) = \underline{\lambda} : K_q\{S_i\} \neq 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \lambda \trianglerighteq \mu$

Si $\lambda = \mu$ $\quad \boxed{\hat{\Theta}(u_q) = \eta\, u_q}$ pa $\eta \neq 0$

Como $\hat{\Theta}$ es morfismo de reps

$$\hat{\Theta}(\pi(u_q)) = \pi(\hat{\Theta}(u_q)) = \pi(\eta\, u_q) = \eta(\pi\, u_q)$$

$$\hat{\Theta}(u_{\pi q}) = \eta\, u_{\pi q} \quad \forall \pi \in S_n$$

Así que PARA TODO GENERADOR r de S^λ

$\hat{\Theta}(r) = \eta\, r \Rightarrow \hat{\Theta} = \eta I$ en S^λ.

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(S^\lambda, M^\lambda) = \underline{\mathbb{C}}$$

valor de η determina el mapa

Si $S^\lambda \cong S^\mu$ entonces componiendo con la inclusión $S^\mu \to M^\mu$ (como reps) construimos un mapa natural en $\mathrm{Hom}_{S_n}(S^\lambda, M^\mu) \Rightarrow \lambda \trianglerighteq \mu$, repitiendo el razonamiento en la otra dirección concluimos $\mu \trianglerighteq \lambda$

$\Rightarrow \boxed{\mu = \lambda}$

$\boxed{\text{Obs:}}$ $\left[\begin{array}{l} M^{(n-1,1)} = \text{stand} \\ M^{(n-1,1)} = \text{triv} \oplus S^{?} \end{array} \right.$