Hoy: Base para los módulos de Specht S^λ

Sabemos $S^\lambda = \left\langle u_q \ : \ \begin{array}{c} q \in \text{Tableaux} \\ \text{con } sh(q) = \lambda \end{array} \right\rangle \subseteq M^\lambda$

$$\vec{u_q} := \sum_{\sigma \in C_q} \operatorname{sgn}(\sigma) \{\sigma q\} \subseteq M^\lambda$$

$$\pi \in S_n \quad \pi\left(\left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) \\ \hline \pi(4) \\ \cline{1-1}\end{array}\right\}$$

Def: Un tableau standard de forma λ es un tableau de forma λ en el que tanto filas como columnas son crecientes

vértice es el mínimo

6!

Ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 6 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline\end{array}$$

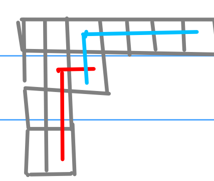
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 6 \\ \hline\end{array}$$

Teorema: $\left\{ u_q \ : \ \begin{array}{c} q \text{ es tableau} \\ \text{standard de forma } \lambda \end{array} \right\} \subset S^\lambda$ es una base para S^λ.

Corolario: (1) $\dim(S^\lambda) = f^\lambda := \#$ Tableaux standard de forma λ

(2) $$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$$

Lema: (Hook length formula)

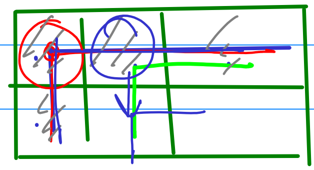


$$\left[\dim(S^\lambda) = \frac{n!}{\prod \text{hook lengths}}\right]$$

Ej: $\dim\left(S^{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\square\square\end{smallmatrix}}\right)$

4	3	2
3	2	1

$$\frac{6!}{4\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 3} = 5$$



De [Fulton – Young Tableaux] sale una "heurística para explicar" el hook-length formula...

$$p_{ij} \; \left[\mathbb{P}\{\text{mínimo elemento del hook de } T_{ij} \text{ sea } ij\}\right] = \frac{1}{\text{hook\_length}(i,j)}$$

si fueran indep (QUE NO SON)

$$\Rightarrow \mathbb{P}\{T \text{ standard}\} = \prod_{ij} p_{ij} = \frac{|\text{Stand}|}{n!}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{n!}{\prod_{ij} p_{ij}} = |\text{Stand}|\right]$$

• Dem del Teorema (mediante un straightening law)

Vamos a definir un orden total en tableaux de forma λ ($\succcurlyeq$)
y probaremos que tiene la siguiente propiedad.

"Si q NO ES un tableau standard
entonces existen c_i y tableaux q_i :

$$u_q = c_1 u_{q_1} + \dots + c_N u_{q_N}$$

con $q_i \succ q \;\; \forall i$"

Procedimiento

$$\underbrace{u_q} = c_1 u_{q_1} + \dots + c_N u_{q_N}$$

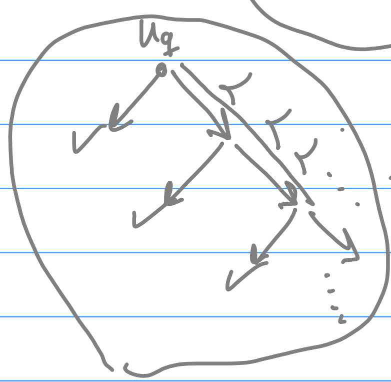
u_{q_i} std ✓

$\exists j : u_{q_j}$ no es std

$$u_q = c_1\left(\beta_1 u_{q_1^{(1)}} + \dots + \beta_t u_{q_1^{(t)}}\right) + c_2 \dots$$

todos son std a la dcha

No



árbol finito.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline\end{array} < \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline\end{array} \gtrsim \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 6 \\ \hline\end{array}$$

Def: $T_1 > T_2$ si de dcha a izquierda y de arriba hacia abajo el primer elemento en que difieren es mayor en T_1.

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$

Ejemplo:

(1) Construir particiones (A', B') de $A \cup B$ con $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$, $A' \cup B' = A \cup B$

$$\begin{bmatrix} (24, 56) ; (25, 46) ; (26, 45) ; \\ (56, 24) ; (46, 25) ; (45, 26) \end{bmatrix};$$

U

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & \\ 6 & & \end{array} =$$

A, B

No std

(Asumimos que las columnas están cada creciente, módulo un signo)

(2) Para cada una considere $\pi \in S_{A \cup B}$

$\pi(A) = A'$

$\pi(B) = B'$ $\rightarrow T(A, B)$

Obs: hay muchas π para cada (A', B')

$24 \to 25$, $56 \to 46$ $\sim$ $\pi = (4, 5)$ $\in T(A,B)$

Elementos de Garnir

Lema: $g_{A,B} = \sum_{\pi \in T(A,B)} \operatorname{sgn}(\pi)\, e_\pi \in \mathbb{C} S_n$

$$\boxed{g_{A,B}(U_q) = 0} \sim \left[U_q + \sum_{\pi \in T(A,B)} \varepsilon\, U_{\pi q} = 0 \right]$$ en S^λ

$$\begin{bmatrix} (24, 56) ; (25, 46) ; (26, 45) ; \\ (56, 24) ; (46, 25) ; (45, 26) \end{bmatrix};$$

U_q

$$\begin{array}{ccc} 1 & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 5 & 4 & \\ 6 & & \end{array} = \lambda_1 \begin{array}{ccc} 1 & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \\ 6 & ✓ & \end{array} + \lambda_2 \begin{array}{ccc} 1 & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 6 & \\ 5 & ✓ & \end{array} +$$

$$\lambda_3 \begin{array}{ccc} 1 & 5 & \cancel{3} \\ 2 & 6 & \\ 4 & & \end{array} + \lambda_4 \begin{array}{ccc} 1 & 4 & \cancel{3} \\ 2 & 6 & \\ 5 & & \end{array} + \lambda_5 \begin{array}{ccc} 1 & 4 & \cancel{3} \\ 2 & 5 & \\ 6 & & \end{array}$$

× × ×

No std

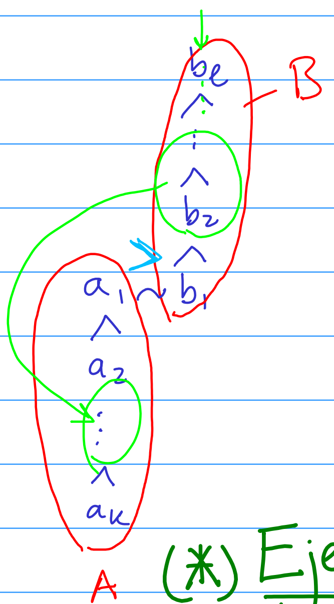
$A \cup B = \{3,5,6\}$

$(56,3)\ ;\ (36,5)\ ;\ (35,6)$

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & \\ 4 & & \end{array} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & \\ 4 & & \end{bmatrix} + -\underbrace{\operatorname{sgn}(\pi)}_{(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & \\ 4 & & \end{bmatrix}$$

?

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (5,3,6)$$



Note que las tablas nuevas son TODAS más grandes

De aquí concluimos que los standard generan.

(*) Ejercicio:

(1) Demuestre que $\{u_q : q \text{ es std},\ sh(q) = \lambda\}$ es lin. indep.

[Sugerencia: los tableaux que aparecen en u_q son más grandes que q si q es std]

(2) Demuestre el Lema de elementos de Garnir. [Sagan].