

Hoy: Rep. Inducidos 2:

Sea  $H \leq G$  y sea  $W$  una rep de  $H$  ( $\rho_W : H \rightarrow GL(W)$ ). Queremos usar  $W$  para construir una representación de  $G$ , la más pequeña que contenga a  $W$ .

Construcción:  $\text{Ind}_H^G(W) := (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W)^H$  como  $G$ -representación donde en  $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W$  tenemos dos acciones que conmutan entre sí que son:

$$\rho_G(g) (e_t \otimes w) = e_{g \cdot t} \otimes w$$

$\uparrow$  producto en  $G$

$$\rho_H(h) (e_t \otimes w) := e_{th^{-1}} \otimes \rho_W(h)(w)$$

$\uparrow$  prod en  $G$        $\uparrow$   $W$  es una  $H$ -rep.

Lema: Sean  $r_1, \dots, r_T$  representantes de las clases laterales de  $H$  en  $G$  (i.e.  $G/H = \{r_1H, r_2H, \dots, r_TH\}$ )  
 $T = [G:H]$

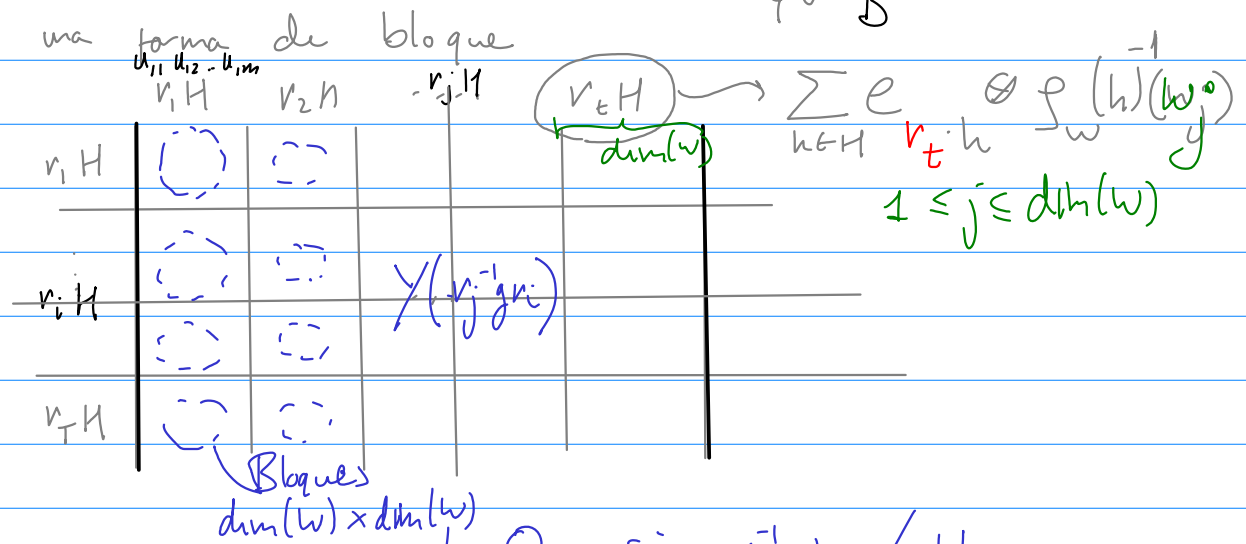
Sea  $w_1, w_2, \dots, w_m$  una base para  $W$ . Entonces

$$(1) \left\{ \underbrace{\sum_{h \in H} e_{r_i h} \otimes \rho_W(h^{-1})(w_j)}_{u_{ij}} : \begin{array}{l} 1 \leq i \leq [G:H] \\ 1 \leq j \leq \dim(W) \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W$$

son una base para  $\text{Ind}_H^G(W)$ . En particular  $\dim(\text{Ind}_H^G(W)) = [G:H] \dim(W)$ .

(2)  $\vdots$

(2) En esta base las matrices de  $[\rho(g)]_{\mathcal{B}}$  tienen



$$\chi(v_j^{-1} g v_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } v_j^{-1} g v_i \notin H \\ [\rho_w(h)]_{\{w_1, \dots, w_m\}}, & \text{si } v_j^{-1} g v_i = h \in H \end{cases}$$

(3) Si  $\eta_w$  es el caracter de la representación  $w$  de  $G$

$$\bar{\eta}_w: G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \begin{cases} \eta_w(g), & \text{si } g \in H \\ 0, & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

$$\chi_{\text{Ind}_H^G(w)}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \bar{\eta}_w(x^{-1} g x)$$

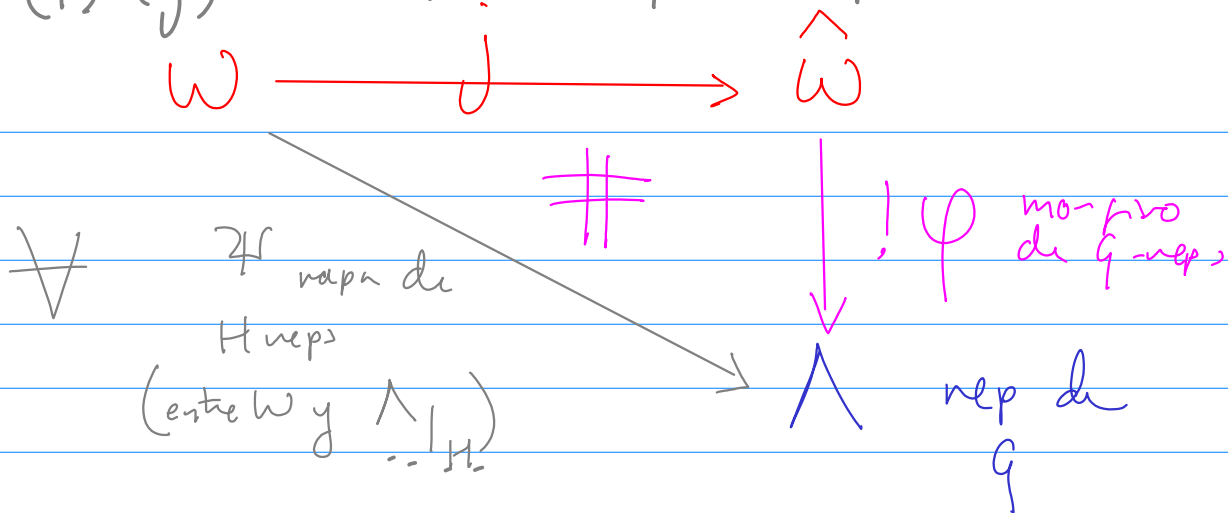
Lema 2: Si  $\hat{w} := \text{Ind}_H^G(w)$  y

$$j: w \xrightarrow[\text{mapa de rep.}]{} \hat{w}$$

$$w \mapsto \sum_{h \in H} e_h \otimes \rho_w(h)(w)$$

$(j, \hat{w})$

(1)  $(j, \hat{w})$  satisface la siguiente prop. universal



$$\text{Hom}_H(\omega, \Lambda_{|H}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{G}}(\hat{\omega}, \Lambda)$$

(2) Se sigue que

$$\dim(\text{Hom}_H(\omega, \Lambda_{|H})) = \dim(\text{Hom}_{\mathcal{G}}(\hat{\omega}, \Lambda))$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}}(\hat{\omega}, \Lambda) = \hat{\omega}^* \otimes \Lambda$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\hat{\omega}}(g)} \chi_{\Lambda}(g) = \langle \overline{\chi_{\hat{\omega}}} \circ \chi_{\Lambda}, \chi_{\text{triv}} \rangle$$

$$\left[ \langle \chi_{\Lambda}, \chi_{\hat{\omega}} \rangle_{\mathcal{G}} \right] \langle \chi_D, \chi_{\text{triv}} \rangle = \# \text{ copias de triv en } D$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}}(D_1, D_2) = \underbrace{\text{Hom}(D_1, D_2)}_{\chi_{\text{triv}}}$$

Así que tenemos la fórmula de Reciprocidad de Frobenius:

$$\langle \chi_{\omega}, \chi_{\Lambda_{|H}} \rangle_H = \langle \chi_{\hat{\omega}}, \chi_{\Lambda} \rangle_{\mathcal{G}}$$

Sea  $G = S_3$   $\hat{w}_1$   $H = \{e, (23)\}$   $\pi_{1/276}$   $w_1$   $w_2$   $[tr_{w_1}|_H, sgn_H]$   
 (a) Calcule  $Ind_H^G(tr_{w_1}|_H)$ ,  $Ind_H^G(sgn_H)$ ,  $\hat{w}_2$

Sol:  $dim(\hat{w}_1) = dim(\hat{w}_2) = |G/H| = 3$

(1) Intentamos con recip de Frobenius:

$$\left[ \left\langle \chi_{w_1}, \left[ \chi_{\Lambda|_H} \right] \right\rangle_H \right] = \left\langle \chi_{\hat{w}_1}, \chi_{\Lambda} \right\rangle_G$$

	e	(12)	(123)
tr	1	1	1
sgn	1	-1	1
u	2	0	-1

$$\langle \chi_{\hat{w}_1}, \chi_{tr} \rangle_G = 1$$

$$\langle \chi_{\hat{w}_1}, \chi_{sgn} \rangle_G = 0$$

$$\langle \chi_{\hat{w}_1}, \chi_u \rangle_G = 1$$

$$\langle \chi_{w_1}, \chi_{tr|_H} \rangle_H = 1 \quad \checkmark \quad \left[ \chi_{\hat{w}_1} = \chi_{tr} + \chi_u \right]$$

$$\langle \chi_{w_1}, \chi_{sgn|_H} \rangle_H = \frac{1}{2} \left( \underbrace{1 \cdot 1}_{\text{en } H} + \underbrace{(-1) \cdot 1}_{\text{ind de la tral}} \right) = 0$$

$$\chi_{R|_H}(h) = \chi_R(h)$$

$$\langle \chi_{w_1}, \chi_{u|_H} \rangle_H = \frac{1}{2} \left( 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 1 \right) = 1$$

$$\left[ \chi_{\hat{w}_2} = \chi_{sgn} + \chi_u \right]$$

inducida de signo

Ejercicio: Calcule las matrices.