Hoy: Rep. Inducidos 2:

Sea $H \leq G$ y sea W una rep de H $(\rho_W : H \longrightarrow GL(W))$. Queremos usar W para construir una representación de G, la más pequeña que contenga a W.

Construcción: $\mathrm{Ind}_H^G(W) := (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} W)^H$ como G-representación

donde en $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} W$ tenemos DOS ACCIONES que conmutan entre sí que son:

$$\rho_G(g)(e_t \otimes w) = e_{\underset{\uparrow}{g \cdot t}} \otimes w$$

producto en G

$$\rho_H(h)(e_t \otimes w) := e_{\underset{\uparrow}{th^{-1}}} \otimes \underbrace{\rho_W(h)(w)}_{\uparrow}$$

prod en G $\qquad$ W es una H-rep.

Lema: Sean $r_1, \dots, r_T$ representantes de las clases laterales de H en G (i.e. $G/H = \{r_1H, r_2H, \dots, r_TH\}$ $T = [G:H]$)

Sea $w_1, w_2, \dots, w_m$ una base para W. Entonces

(1) $$\left\{ \underbrace{\sum_{h \in H} e_{r_i h} \otimes \rho_W(h^{-1})(w_j)}_{u_{i,j}} : \begin{array}{l} 1 \leq i \leq [G:H] \\ 1 \leq j \leq \dim(W) \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{C}G \otimes W$$

son una base para $\mathrm{Ind}_H^G(W)$. En particular $\dim(\mathrm{Ind}_H^G(W)) = [G:H]\dim(W)$.

(2)

⋮

(2) En esta base las matrices de $[\rho_G(g)]_B$ tienen una forma de bloque

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & \overset{u_{11}\, u_{12} \dots u_{1m}}{r_1H} & r_2H & r_j H & \underbrace{r_tH}_{\dim(W)} \\
\hline
r_1H & \cdot & \cdot & & \\
\vdots & \cdot & \cdot & & \\
r_iH & \cdot & \cdot & Y(r_j^{-1} g r_i) & \\
r_TH & \cdot & \cdot & & \\
\end{array}
$$

$r_tH \longrightarrow \sum_{h\in H} e_{r_t h} \otimes \rho_W(h)^{-1}(w_j)$, $\quad 1 \leq j \leq \dim(W)$

Bloques $\dim(W) \times \dim(W)$

$$
Y(r_j^{-1} g r_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } r_j^{-1} g r_i \notin H \\ [\rho_W(h)]_{\{w_1, \dots, w_m\}}, & \text{si } r_j^{-1} g r_i = h \in H \end{cases}
$$

(3) Si η_W es el caracter de la representación W definimos

$$
\bar{\eta}_W : G \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g \longmapsto \begin{cases} \eta_W(g), & \text{si } g \in H \\ 0, & \text{d.l.c.} \end{cases}
$$

$$
\boxed{\chi_{\mathrm{Ind}_H^G(W)}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \bar{\eta}_W(x^{-1} g x)}
$$

Lema 2: Si $\hat{W} := \mathrm{Ind}_H^G(W)$ y

$$
j : W \xrightarrow[\text{morfismo de reps?}]{1-1} \hat{W}, \qquad w \longmapsto \sum_{h \in H} e_h \otimes \rho_W(h)^{-1}(w)
$$

$(j, \hat{W})$

(1) $(j, \hat{W})$ satisface la siguiente prop. universal

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\mathcal{H}"'] & \hat{W} \arrow[d, "\exists!\, \varphi"] \\
 & \Lambda
\end{tikzcd}
$$

$\forall$ $\mathcal{H}$ mapa de H reps (entre W y $\Lambda|_H$)

φ morfismo de G-reps

Λ rep de G

$$\mathrm{Hom}_H(W, \Lambda|_H) \cong \mathrm{Hom}_G(\hat{W}, \Lambda)$$

(2) Se sigue que

$$\dim(\mathrm{Hom}_H(W, \Lambda|_H)) = \underbrace{\dim(\mathrm{Hom}_G(\hat{W}, \Lambda))}$$

$$\mathrm{Hom}(\hat{W}, \Lambda) = \hat{W}^* \otimes \Lambda$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_{\hat{W}}(g)}\,\chi_\Lambda(g) = \langle \underbrace{\overline{\chi_{\hat{W}}} \cdot \chi_\Lambda}, \chi_{triv} \rangle$$

$$'' \quad [\langle \chi_\Lambda, \chi_{\hat{W}} \rangle]_G$$

$\langle \chi_D, \chi_{triv} \rangle = \#$ copias de triv en D

$$\mathrm{Hom}_G(D_1, D_2) = \underbrace{\mathrm{Hom}(D_1, D_2)}_{\chi_{\mathrm{Hom}(\,)}}{}^G$$

Así que tenemos la fórmula de Reciprocidad de Frobenius:

$$\langle \chi_W, \chi_{\Lambda|_H} \rangle_H = \langle \chi_{\hat{W}}, \chi_\Lambda \rangle_G$$

Sea $G = S_3$ $\quad H = \{e, (23)\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\quad [\text{triv}_H, \text{sgn}_H] = [W_1, W_2]$

(a) Calcule $\underbrace{\text{Ind}_H^G(\text{triv}_H)}_{\hat{W}_1}$, $\text{Ind}_H^G(\text{sgn}_H) = \hat{W}_2$.

Sol: $\dim(\hat{W}_1) = \dim(\hat{W}_2) = |G/H| = 3$

(1) Intentamos con recip. de Frobenius:

$$\left[\left\langle \chi_{W_1}, [\chi_\Lambda|_H] \right\rangle_H\right] = \langle \chi_{\hat{W}_1}, \chi_\Lambda \rangle_G \ ?$$

	e	(12)	(123)
	1	3	2
tr	1	1	1
sgn	1	-1	1
U	2	0	-1

$\langle \chi_{\hat{W}_1}, \chi_{tr} \rangle_G = 1$

$\langle \chi_{\hat{W}_1}, \chi_{sgn} \rangle_G = 0$

$\langle \chi_{\hat{W}_1}, \chi_U \rangle_G = 1$

$\langle \chi_{W_1}, \chi_{triv} \rangle_H = 1$ ✓

$[\chi_{\hat{W}_1} = \chi_{tr} + \chi_U]$

$$\langle \chi_{W_1}, \chi_{sgn}|_H \rangle_H = \frac{1}{2}\underbrace{(1\cdot 1 + (-1)\cdot 1)}_{\text{en } H} = 0$$

ind de la trivial

$$\chi_R\big\downarrow_H(h) = \chi_R(h)$$

$$\langle \chi_{W_1}, \chi_{U|H} \rangle = \frac{1}{2}(1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 1) = 1$$

$[\chi_{\hat{W}_2} = \chi_{sgn} + \chi_U]$

inducida de signo

Ejercicio: Calcule las matrices.