Dem del Lema:

Sean $r_1, \ldots, r_T$ rep de G/H

Sean $u_1, \ldots, u_m$ base de W

$\mathcal{B} =$ Af: $\left\{ \sum_{h \in H} e_{r_i h} \otimes \rho_W(h)^{-1}(u_j) \right\}_{\substack{1 \leq i \leq [G:H] \\ 1 \leq j \leq \dim(W)}}$ son base de $(\mathbb{C}G \otimes W)^H$.

(a) Generan: ✓

$$\sum_{g \in G} e_g \otimes w_g \iff \forall h \in H \left(\rho_H(h) \left(\sum_g e_g \otimes w_g \right) = \sum_g e_g \otimes w_g \right)$$

Calculo

$g = uh$
$u = gh^{-1}$

$$\rho_H(h) \left(\sum_g e_g \otimes w_g \right) = \sum_g e_{gh^{-1}} \otimes \rho_W(h)(w_g) =$$

$$\sum_u e_u \otimes \rho_W(h)(w_{uh}) = \sum_{g \in G} e_g \otimes w_g$$

$$\forall h \in H \left(\boxed{w_g = \rho_W(h)(w_{gh})} \right)$$

$$w_{gh} = \rho_W(h)^{-1}(w_g)$$

[w_g determina w_{gh} $\forall h \in H$]

$(\mathbb{C}G \otimes W)^H$
ψ

Si $\sum_{g \in G} e_g \otimes w_g = \sum_{i=1}^{T} \sum_{h \in H} e_{r_i h} \otimes w_{r_i h}$

$$\overset{(\,)^{H}}{=} \sum_{i=1}^{T} \sum_{h \in H} e_{r_i h} \otimes \rho_W(h)^{-1}(w_{r_i})$$

con $[\vec{w}_{r_1}, \ldots, \vec{w}_{r_T} \in W]$

Expresamos w_{r_i} en la base $u_1, \ldots, u_m$ expresa nuestro vector como comb lineal de los de arriba demostrando que genera $(\mathbb{C}G \otimes W)^H$.

(b) Independencia ?

$$\left[\vec{u}_{ij} := \sum_{h\in H} e_{r_i h} \otimes \rho_W(h)^{-1}(u_j)\right]$$

Sean $\lambda^{j}_{(i)} \in \mathbb{C}$ tales que $\left[\sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{m} \lambda^{j}_{(i)}\, \vec{u}_{ij}\right] = \vec{0}$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} \lambda^{j}_{(i)}\, \vec{u}_j}_{e_s} = \underset{\mathbb{C}G\times W}{\vec{0}}\right) \forall i$$

Sea $\ell_{r_i} : [\mathbb{C}G \otimes W] \longrightarrow W$

$$(e_s \otimes w) \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{si } s \neq r_i \\ w, & \text{si } s = r_i \end{cases}$$

$$\ell_{r_k}\left(\sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{m} \lambda^{j}_{(i)}\, \vec{u}_{ij}\right) = \left[\sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{m} \lambda^{j}_{(i)}\, \ell_{r_k}(\vec{u}_{ij})\right]$$

$$\ell_{r_k}\left(\sum_{h\in H} e_{[r_i h]} \otimes \rho_W(h)^{-1}(u_j)\right) \underset{\text{rep de clases laterales}}{=} \begin{cases} u_j, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{m} \lambda^{j}_{(k)}\, \underset{\text{base}}{u_j} = \ell_{r_k}(\vec{0}) = \vec{0}\right] \forall k$$

$$\Rightarrow \left[\lambda^{j}_{(k)} = 0\right] \forall k, \forall j.$$

Como los $\vec{u}_i$ son lin. indep en W

(2) Sea $g \in G$, queremos estudiar $[\rho_G(g)]_B$

$$\rho_G(g)\left(\sum_{h\in H} e_{r_i h} \otimes \rho_W(h)^{-1}(u_j)\right) =$$

$$= \sum_{h\in H} e_{g r_i h} \otimes \rho_W(h)^{-1}(u_j) \Longleftarrow$$ expresarlo como suma de elementos de B

Como los r_s son rep de G/H entonces $\exists!\, r_k, h'$

$$[g r_i = r_k h']$$

$t = h'h$

$h = h'^{-1} t$

$$= \sum_{h\in H} e_{r_k h' h} \otimes \rho_W(h)^{-1}(u_j) =$$

$$= \sum_{t\in H} e_{r_k t} \otimes \rho_W(h'^{-1} \circ t)^{-1}(u_j)$$

$$\left(\rho_W(h'^{-1})\,\rho_W(t)\right)^{-1} = \rho_W(t)^{-1}\left(\rho_W(h')\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{t\in H} e_{r_k\cdot t} \otimes \rho_W(t)^{-1}}_{\text{forma correcta}} \underbrace{\left[\underbrace{\rho_W(h')(u_j)}_{\text{expandir en la base } u_j}\right]}_{\text{en } W} = \sum_{i=1}^{\dim(W)} c_{ij}\, u_i$$

$$[\rho_W(h')]_{\{u_1,\dots,u_m\}} = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{array} \begin{array}{c} u_j \\ \left[\begin{array}{c} \vdots \\ c_{ij} \\ \vdots \end{array}\right] \end{array}$$

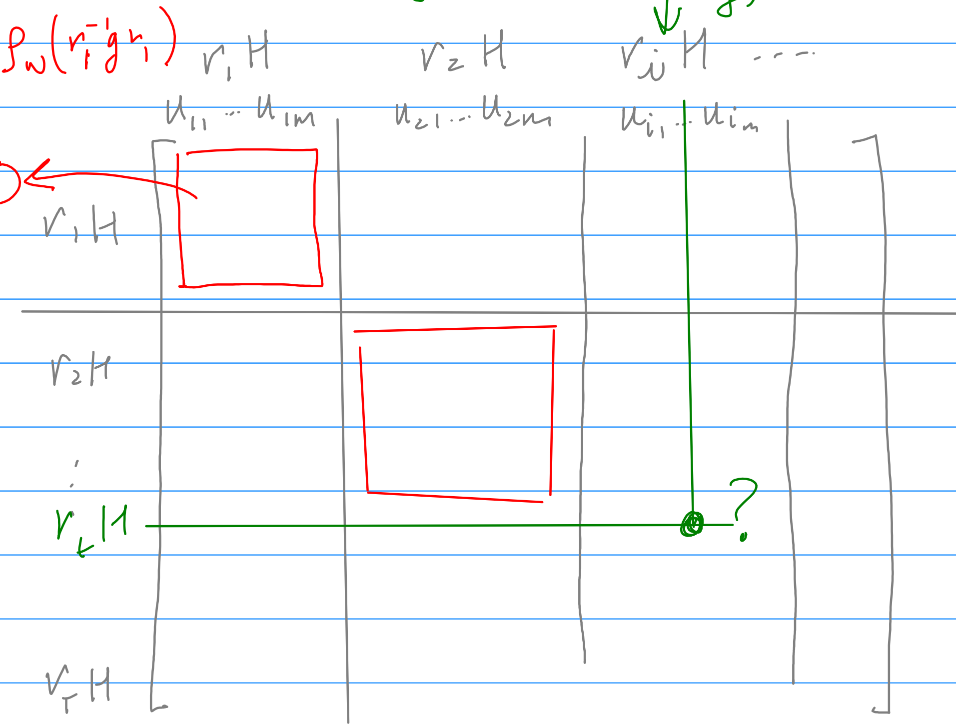
$$= \sum_{i=1}^{\dim(W)} c_{ij} \left(\underbrace{\sum_{t\in H} e_{r_k\cdot t} \otimes \rho_W(t)^{-1}(u_i)}_{u_{ki}}\right)$$

tengo $g \cdot r_i$

$r_1^{-1} g r_1 \in H \;\; \rho_W(r_1^{-1} g r_1)$

$r_1^{-1} g r_1 \to 0$

$$[\rho_G(g)]_B =$$



$$\underline{g r_i = r_k \cdot h'}$$

Si $r_t^{-1} g r_i \notin H \longrightarrow\ ? = 0$

$r_t^{-1} g r_i = h' \in H \longrightarrow\ ? = [\rho_W(h')]_{u_1 \dots u_m}$

(3) Cómo se ve $\operatorname{Tr}\left([\rho_G(g)]_B\right) \stackrel{?}{=}$

Si η_W es el caracter de W

$(\forall h \in H \quad \eta_W(h) = \operatorname{Tr}(\rho_W(h)))$

$$\overline{\eta}_W(g) = \begin{cases} \eta_W(g), & \text{si } g \in H \\ 0, & \text{d/c.} \end{cases}$$

Af:

$$\left[\chi_{\hat{W}}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \overline{\eta}_W(x^{-1} g x)\right]$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G : \\ x^{-1} g x \in H}} \eta_W(x^{-1} g x)$$

$$\eta_W(h^{-1}(r_i^{-1} g r_i) h) = \eta_W((r_i h)^{-1} g (r_i h))$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{r_i : r_i^{-1} g r_i \in H} \sum_{h \in H} \eta_W((r_i h)^{-1} g (r_i h))$$

$$= \frac{1}{\cancel{|H|}} \sum_{\underline{r_i} : r_i^{-1} g r_i \in H} \cancel{|H|} \, \eta_W(r_i^{-1} g r_i)$$

η_W es constante en clases de conjugación.

$=$ Traza de la matriz por bloques porque es la suma de las trazas de los bloques diagonales.

Ejercicio: (b) Demuestre que la representación inducida satisface la propiedad universal.

$$\begin{tikzcd} \underset{\text{H-rep}}{W} \arrow[r, "j"] & \hat{W} \end{tikzcd}$$

$$w \longmapsto \sum_{h \in H} e_h \otimes \rho_W(h)^{-1}(w)$$

(a) Demuestre que j es 1-1 y es un morfismo donde $\hat{W}$ se considera un H-rep mediante la restricción de la acción de G a izquierda!

Hint: (Existencia)

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[dr, "\psi"'] & \hat{W} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\varphi = \delta \circ i"] & \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} W \arrow[dl, "\delta"] \\ & \underset{\text{G-rep}}{\Lambda} & \end{tikzcd}$$

i: morfismo de G-reps

ψ: morfismo de H-reps entre W y $\Lambda|_H$

δ lineal morfismo de G-reps

$$\delta(e_g \otimes w) := \rho_\Lambda(g)(\psi(w))$$