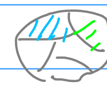
Hoy: Funciones de clase y caracteres  G

Def: $\mathbb{C}_{class}[G] = \{ f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ que son constantes en clases de conjugación $[f(g) = f(h^{-1}gh)]\ \forall g,h \in G \}$

Ejemplo: $\forall$ rep V, $\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C} \in \mathbb{C}_{class}[G]$

Si $\alpha : G \longrightarrow \mathbb{C}$ podemos usarla para calcular, para cualquier rep V un "promedio ponderado"

$$\left[\varphi = \sum_{g \in G} \underbrace{\alpha(g)}_{\text{coeficiente}} \overbrace{[\rho_V(g)]}^{\text{matriz}} \in \mathrm{Hom}(V,V)\right]$$

Teorema: $\alpha \in \mathbb{C}_{class}[G] \iff \left[\forall \text{ rep } V \text{ tenemos que } \varphi_V \in \mathrm{Hom}_G(V,V)\right]$

Dem: Recuerde que $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V,V) \iff \forall h \in G$
$\rho(h)\varphi = \varphi\rho(h) \iff [\rho(h)\varphi\rho(h^{-1}) = \varphi]$

Af: Si $\alpha \in \mathbb{C}_{class}[G] \Rightarrow \rho(h)\varphi\rho(h^{-1}) = \varphi \quad \forall h \in G$

$$\rho(h)\varphi\rho(h^{-1}) = \sum_{g \in G} \rho(h)\underbrace{\alpha(g)}_{\text{es calar}}\rho(g)\rho(h^{-1})$$

$$= \sum_{g \in G} \alpha(g)\rho(hgh^{-1}) = \sum_{u \in G} \alpha(h^{-1}uh)\rho(u)$$

$u = hgh^{-1} \iff g = h^{-1}uh$

$$= \sum_{u \in G} \alpha(u)\rho(u) = \varphi$$

(b) Af: En $V = \mathbb{C}G$ las matrices $\{\rho_{\mathbb{C}G}(g) : g \in G\} \subseteq \mathrm{Hom}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)$ son linealmente independientes ✓

Si

$$a_1 \rho(g_1) + \dots + a_n \rho(g_n) = 0 \quad \text{matriz cero.}$$

$$(a_1 \rho(g_1) + \dots + a_n \rho(g_n))\, \rho(g_1^{-1}) = 0 \cdot \rho(g_1^{-1}) = 0$$

$$[a_1 \, Id + \dots + a_n \underbrace{\rho(g_n g_1^{-1})}_{\text{no es la id.}}] = 0 \underset{\text{mirando la diagonal}}{\Longrightarrow} a_1 = 0 \; ✓$$

Si $\rho_{\mathbb{C}G}(h^{-1}) \varphi \rho_{\mathbb{C}G}(h) = \varphi \quad \forall h$

$$\sum_{g \in G} \alpha(g) \rho_{\mathbb{C}G}(h^{-1} g h) = \sum_{g \in G} \alpha(g) \boxed{\rho_{\mathbb{C}G}(g)}$$

$h^{-1} g h = t$

$g = h t h^{-1}$

$\alpha(h t h^{-1})$ $\qquad$ $\alpha(t)$ $[\rho_{\mathbb{C}G}(t)]$

$\Rightarrow \alpha(h t h^{-1}) = \alpha(t) \quad \forall t \; \forall h$

$\Rightarrow \alpha \in \mathbb{C}_{class}[G]$.

Consecuencia: $\{\chi_{V_i} : \underbrace{V_i \in \mathrm{irreps}(G)}_{\text{reps irreducibles de } G}\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{C}_{class}[G]$.

Ejercicio: $\{v_1, .., v_k\} \subseteq W$

$\langle v_1, .., v_k \rangle = W$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \; \langle \alpha, v_i \rangle = 0 \; \forall i \Rightarrow \alpha \equiv 0$

Dem: Sea $\alpha \in \mathbb{C}_{class}[G]$ y supongamos que

$$\langle \alpha, \chi_{V_i} \rangle = 0 \quad \forall V_i \in \mathrm{irreps}.$$

Af: $\alpha = 0$

Si V es una rep de G

$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\oplus a_k}$, hay una base que las hace diagonal por bloques

$$\rho_V(g) = \begin{array}{c} \\ V_1^{\oplus a_1} \\ \vdots \\ V_k^{\oplus a_k} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1^{\oplus a_1} & V_2^{\oplus a_2} & \dots & V_k^{\oplus a_k} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|} \rho_{V_1}(g) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \rho_{V_2}(g) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \rho_{V_3}(g) \\ \hline 0 & & \end{array}\right] \end{array}$$

Los "ponedios" respeta esta estructura, así que para estudiarlos basta estudiar que pasa en las ireps

Sea V_1 una irep de G

$$\left[\sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)}\, \rho_{V_1}(g) = \varphi_{V_1}\right] \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_1)$$

por Lema de Schur V_1 irred.

$$\varphi_{V_1} = \lambda\, \mathrm{Id}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\sum_{g \in G} \alpha(g)\, \rho_{V_1}(g)\right) = \lambda \dim(V_1)$$

$$\sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)}\, \chi_{V_1}(g) = |G| \langle \chi_{V_1}, \alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$$

Matriz

Así que para toda irep $\sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)}\, \rho_{V_i}(g) = 0$

y por lo tanto para toda rep W, irreducible o no

$$\sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} [\rho_W(g)] = 0$$

en particular para $\mathbb{C}G$, donde los $\rho_{\mathbb{C}G}(g)$ son lin indep. Concluimos

$$\left(\overline{\alpha(g)} = 0 \right) \forall g \in G$$

$$\Rightarrow \mathbb{C}_{class}[G] = \langle \chi_{V_i} : V_i \in \text{ireps} \rangle$$

$$\left[\alpha = \sum_{V_i \text{ ireps}} \underbrace{\langle \alpha, \chi_{V_i} \rangle}_{\text{coeficientes}} \chi_{V_i} \right]$$

<u>Consecuencia:</u> $\langle \chi_{V_i} : V_i \text{ ireps} \rangle = \mathbb{C}_{class}[G]$

$$\dim \langle \chi_{V_i} : V_i \text{ ireps} \rangle = \dim \left(\mathbb{C}_{class}[G] \right)$$

$$\# \text{reps irreducibles} = \# \text{clases de conjugación}$$

??? biyección?

Recuerde que si V es una rep cualquiera $\pi : V \to V$ (proy sobre la componente isotípica de la rep trivial)

$\pi = id$ en V^G y $\pi^2 = \pi$, $\quad \pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_V(g)$

Consecuencia:

Si $\underbrace{V_i \text{ es una irrep cualquiera}}$ y W es una rep

entonces

$$\boxed{\pi_{V_i} := \frac{\dim(V_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} \, \big[\rho_W(g) \big]} \in \operatorname{Hom}(W, W)$$

proy sobre la isotípica de V_i

conjugado

Af: $\pi_{V_i} = \underbrace{id}_{0}$ en V_i, 0 en V_j, $j \neq i$ $\Big\}$ en irreps, es decir es la proyección sobre la comp isotípica de copias de V_i.

Dem: Si $W = V_j$

$\pi_{V_i} \in \operatorname{Hom}_G(V_j, V_j)$ porque $\overline{\chi_{V_i}(\cdot)}$ es una función de clase.

Por Lema de $\underline{\text{Schur}}$

$$\pi_{V_i} = \lambda \, \underline{Id_{V_j}}, \quad \text{tomamos trazas}$$

$$\dim(V_i) \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} \, \rho_{V_j}(g) \right) = \lambda \dim(V_j)$$

$$\dim(V_i) \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} \, \chi_{V_j}(g) = \underline{\lambda} \dim(V_j)$$

$$\lambda \dim(V_j) = \begin{cases} \dim(V_i), & \text{si } V_i = V_j \\ 0, & \text{si } V_i \neq V_j \end{cases}$$

$$\lambda = 1 \quad \checkmark$$

Ejercicios: (para el Martes post-festivo)

(1) Calcule las tablas de caracteres de S_5 y de A_5.

(2) [Fulton–Harris]

2.34, 2.35, 2.37, 2.39

(3) Sea $P: G \longrightarrow \mathbb{C}$ una función
la transformada de fourier de P

$$\left\{ \begin{matrix} \text{irreps de} \\ G \end{matrix} \right\} \longrightarrow \text{Matrices}$$

$$\hat{P}(\rho_{V_i}) = \sum_{g \in G} \overline{P(g)}^{\text{conjugate}} \left[\rho_{V_i}(g) \right]$$

<u>Ej:</u> $P: S_3 \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad p \in [0,1]$

$$\begin{cases} P(e) = p, \quad P(12) = P(13) = P(23) = \frac{1-p}{3} \\ P(\tau) = 0 \text{ para los ciclos de tamaño 3.} \end{cases}$$

Calcule $\hat{P}$.