Hoy: Transformada de Fourier

$\mathbb{C}[G] = \{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \}$ $\quad (\mathbb{C}[G], \rho^*)$

Idea: Gracias a la Teo de reps el álgebra $\mathbb{C}[G]$ tiene una base distinguida. Si $f \in \mathbb{C}[G]$

$$f = \sum_\alpha c_\alpha S_\alpha$$

c_α: transf. de Fourier.

Los coeficientes permiten estudiar algunas propiedades de f de manera simple.

Hay más formas de pensar en $\mathbb{C}[G]$, hemos visto dos:

$\mathbb{C}[G] = \{ f : G \to \mathbb{C} \}$

$(\mathbb{C}[G], \rho^*)$

álgebra de grupo

$\mathbb{C}G = \langle e_g : g \in G \rangle$

$e_g \cdot e_h := e_{g \cdot h}$ ← prod del grupo

$\rho_{\mathbb{C}G}(t) : \mathbb{C}G \longrightarrow \mathbb{C}G$

$e_h \longmapsto e_t \cdot e_h$

↑ mult. por t

Sabemos que hay un isom de reps:

$$\mathbb{C}[G] \xrightarrow{\text{isom de reps.}} \mathbb{C}G$$

$$f \longmapsto \sum_{g \in G} f(g) e_g$$

¿Cómo es la multiplicación de $\mathbb{C}G$ en $\mathbb{C}[G]$?

Def: Si $P, Q : G \longrightarrow \mathbb{C}$ definimos la convolución de P y Q, $P * Q : G \to \mathbb{C}$

$$\left[(P * Q)(h) = \sum_{g \in G} P(hg^{-1}) Q(g) \right]$$

Ejercicio: Demuestre que

(1) $(\mathbb{C}[G], *) \cong (\mathbb{C}G, \cdot)$ isom de álgebras.

(2) Sean P, Q dist. de prob en G
(i.e. $\forall t \in G$ $P(t) \overset{\in \mathbb{R}}{\geq} 0$ y $\sum_{g \in G} P(g) = 1$)
y sea (g_1, g_2) una variable aleat tomando valores en $G \times G$ que cumple:
(1) g_1, g_2 son indeps
(2) $g_1 \sim P$, $g_2 \sim Q$
$\forall t \in G \left(\mathbb{P}\{g_1 = t\} = P(t) \right)$

Define $h = g_1 g_2$. Demuestre que
$$\forall t \in G \left(\mathbb{P}\{h = t\} = (P * Q)(t) \right)$$

$$\mathbb{C}[G] = \underbrace{\mathbb{C}G}_{} \xrightarrow{\varphi} [\mathrm{Hom}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)]$$
$$f \longmapsto m_f : \mathbb{C}G \longrightarrow \mathbb{C}G$$
$$e_g \longmapsto f \odot e_g$$
prod en álgebra de grupo.

$\boxed{* \text{ Lema:}}$ φ es una transf lineal que tiene las siguientes propiedades
(1) φ es hom de álgebras
(2) Si definimos los prod internos correctos
$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle \varphi(f_1), \varphi(f_2) \rangle$ en part φ 1-1
(4) φ no es sobre (y en general NO es morfismo de reps).
(3) Podemos recuperar f explícitamente
$$f(t) = \frac{1}{|G|} \mathrm{Tr}\left(\varphi(f)\, m_{e_{t^{-1}}} \right)$$

Ejemplo: $\mathbb{C}S_3 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}S_3, \mathbb{C}S_3)$

$S_3 = \langle e_e, e_{(12)}, e_{(13)}, e_{(23)}, e_{(123)}, e_{(132)} \rangle$

$\underbrace{2e_e + 3e_{12}}_{\text{matriz de } 6\times 6} = f \in \mathbb{C}S_3$

Calculemos $\varphi(f) = 2\,\varphi(e_e) + 3\,\boxed{\varphi(e_{12})}$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & e_e & e_{12} & e_{13} & e_{23} & e_{123} & e_{132} \\
\hline
e_e & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e_{12} & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e_{13} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\
e_{23} & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\
e_{123} & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\
e_{132} & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2
\end{array}
$$

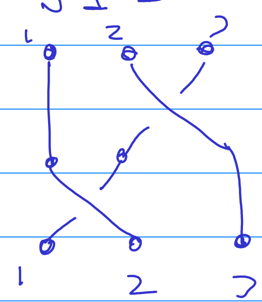
M_f

$M_{e_{12}} = \varphi(e_{12})$

$(12)\circ(13)$

1 2 3
3 1 2

$(12)\circ(23)$
$\shortparallel$
(123)



$(12)\circ(23) = (123)$

$(12)^2(23) = (12)(123) = (123)$

Dem: Sea $f_1 f_2 \in \mathbb{C}G$

Aver: $\underbrace{\varphi(f_1 f_2)}_{\in \, Hom(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)} = \varphi(f_1) \underset{\text{comp de end.}}{\circ} \varphi(f_2)$

$$\varphi(f_1 f_2)(e_t) = (f_1 \cdot f_2) \cdot e_t = f_1 \cdot (f_2 \cdot e_t)$$

$$m_{f_1}(f_2 \cdot e_t) = m_{f_1}(m_{f_2}(e_t)) \quad \checkmark$$

$$= \varphi(f_1) \circ \varphi(f_2)(e_t)$$

(2) **Conectos:** En el dominio:

Si $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G]$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$$

nota que, bajo el isom $\mathbb{C}[G] \to \boxed{\mathbb{C}G}$

$$\langle e_g, e_h \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } g = h \\ 0, & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

En el rango $Hom(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)$

Si $T_1, T_2 \in Hom(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)$:

$$\langle T_1, T_2 \rangle := \frac{1}{|G|} Tr(A_1 A_2^*) = \frac{1}{|G|} \sum_{i,j} (A^1_{ij}) \overline{A^2_{ij}}$$

con $A_i := [T_i]_{\{e_g : g \in G\}}$

Por nuestra escogencia de producto interno esto es indep de la base ortonormal de $\mathbb{C}G$ que escogimos. ↖ Ejercicio

Aver: $\forall\ h, t \in G$

$$\langle e_h, e_t \rangle = \langle \varphi(e_h), \varphi(e_t) \rangle$$

$$\langle \varphi(e_h), \varphi(e_t) \rangle = \frac{Tr\left(m_{e_h}\, m_{e_t}^{*}\right)}{|G|}$$

Por def de producto interno.

$$= \frac{Tr\left(m_{e_h} \cdot m_{e_{t^{-1}}}\right)}{|G|} = \frac{Tr\left(m_{e_{ht^{-1}}}\right)}{|G|}$$

$$= \frac{1}{|G|}\begin{cases} |G| & \text{si } ht^{-1} = e \\ 0, & \text{si } ht^{-1} \neq e \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } h = t \\ 0, & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

Obs: Podemos recuperar f a partir de $\varphi(f)$ de manera explícita

$$f(t) = \frac{Tr\left(\varphi(f) \cdot m_{e_{t^{-1}}}\right)}{|G|}$$

$$f = \sum \underbrace{f(h) e_h}$$

$$m_f = \sum f(h)\, m_{e_h}$$

$$m_f \cdot m_{e_{t^{-1}}} = \sum_h f(h)\, m_{e_h} m_{e_{t^{-1}}}$$

$$= \sum_h f(h) \left[m_{e_{ht^{-1}}} \right] \quad \text{tomamos trazas}$$

$$\mathrm{Tr}(m_f \cdot m_{e_{t^{-1}}}) = |G|\, f(t)$$

** Idea!!

$$\mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)$$

$$f \longmapsto \sum_{g \in G} f(g)\, m_{e_g}$$

$$\left[\sum_{g \in G} f(g) \left[\rho_{\mathbb{C}G}(g) \right] \right]$$

se puede diagonalizar por bloques!

diagonalizar por bloques $\rho_{\mathbb{C}G}(g)$

$$\mathbb{C}G \cong \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{\oplus \dim(V_i)}$$

$$\rho_{\mathbb{C}G}(t) = \begin{array}{c} \\ \begin{matrix} V_1 \\ \vdots \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_2 \\ \vdots \\ V_k \\ \vdots \\ V_k \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{V_1 \; V_1 \cdots V_1}^{\dim(V_1)} \quad \overbrace{V_2 \cdots V_2}^{\dim(V_2)} \quad \cdots \quad \overbrace{V_k \cdots V_k}^{\dim(V_k)} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \rho_{V_1}(t) & & \\ & \rho_{V_1}(t) & \\ & & \ddots \end{matrix} & 0 & \\ \hline 0 & & \\ \hline & & \end{array}\right] \end{array}$$

$$\rho_{\mathbb{C}G}(t) = \bigoplus_{i=1}^{k} \left[\underline{\rho_{V_i}(t)} \otimes I_{\dim(V_i)}\right]$$

Def: Si $f \in \mathbb{C}[G]$ y ρ_{V_i} es una rep irreducible de grupo,

$$\hat{f}(\rho_{V_i}) := \sum_{g \in G} f(g)\left[\rho_{V_i}(g)\right]$$

$$f \longmapsto \left(\hat{f}(\rho_{V_1}), \hat{f}(\rho_{V_2}), \ldots, \hat{f}(\rho_{V_k})\right)$$

El lema * nos da las propiedades de la transf de Fourier.