$$\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}G \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Hom}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)$$

$$\underline{f} = \underbrace{\sum_{g\in G} f(g)e_g} \longmapsto m_f : \mathbb{C}G \longrightarrow \mathbb{C}G$$

producto del álgebra

$$m_f(e_h) = \Big(\underbrace{\sum_{g\in G} f(g)e_g}\Big) \cdot e_h$$

$$[m_f]_B \quad B = \{ e_g : g\in G\}$$

Matrices

$$[m_f]_B = \sum_{g\in G} f(g)\,[m_{e_g}]_B = \sum_{g\in G} \underline{f(g)}\,[\rho_{\mathbb{C}G}(g)]_B$$

Lema:

(1) φ es hom de álgebras [no de reps]. (φ transforma convolución de funciones en producto de matrices)

(2) Si $\langle e_g, e_h\rangle = \delta_{gh}$ y $\langle A, B\rangle = \frac{1}{|G|}\operatorname{Tr}(AB^*)$

entonces

$$\langle f_1, f_2\rangle = \langle \varphi(f_1), \varphi(f_2)\rangle \quad \text{isometría}$$

(3) Podemos recuperar f explícitamente a partir de $\varphi(f)$

$$\forall t\in G\ \left(f(t) = \frac{1}{|G|}\operatorname{Tr}\left(\varphi(f)\cdot[m_{e_{t^{-1}}}]_B\right)\right)$$

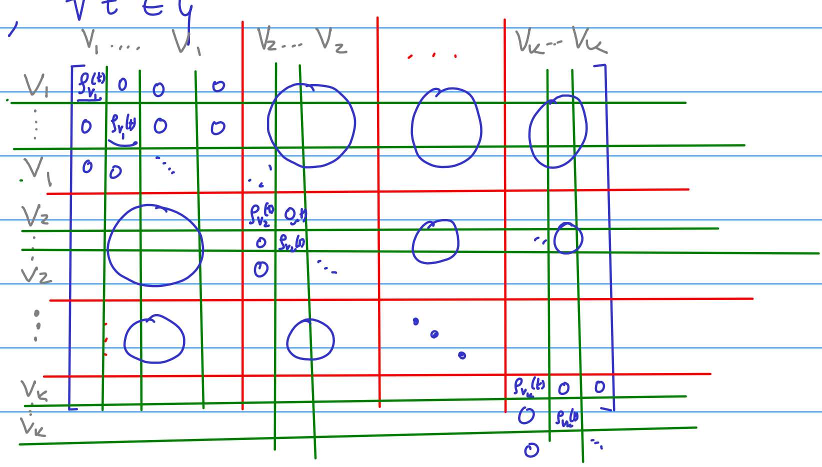
Como representaciones $\mathbb{C}G \cong \overbrace{V_1}^{\dim(V_1)} \oplus \dots \oplus \overbrace{V_k}^{\dim(V_k)}$

$\langle e_g, e_h\rangle = \delta_{gh}$ es G-invariante (porque es una rep por permutaciones)

Así que tomando una base ortonormal de cada una de las V_i obtenemos una base ortonormal para $\mathbb{C}G$. Llamémosla C.

Respecto a C, $\forall t\in G$

$$[\rho_{\mathbb{C}G}(t)]_C =$$



con $[\rho_{V_i}(t)]$ matrices unitarias.

$$[\rho_{\mathbb{C}G}(t)]_C = \bigoplus_{i=1}^{k} \left[[\rho_{V_i}(t)]_C \otimes I_{\dim(V_i)} \right]$$

$$[\rho_{\mathbb{C}G}(t)]_B = U\,[\rho_{\mathbb{C}G}(t)]_C\,U^* \quad U \text{ unitaria.}$$

Qué dice el Lema en esta base?

$$[m_f]_C = \sum_{g\in G} f(g)\,[m_{e_g}]_C = \sum_{g\in G} f(g) \left(\bigoplus_{i=1}^{k} [\rho_{V_i}(t)]_C \otimes I_{\dim(V_i)} \right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{k} \Big(\underbrace{\sum_{g\in G} f(g)\,[\rho_{V_i}(t)]_C}_{\boxed{\hat{f}(\rho_{V_i})}} \otimes I_{\dim(V_i)} \Big)$$

Motivación.

Teorema: [Propiedades de Transf de Fourier] Sean $P, Q : G \longrightarrow \mathbb{C}$

(1) $\widehat{P * Q}(\rho_i) = \hat{P}(\rho_i)\,\hat{Q}(\rho_i)$

(2) $\langle P, Q \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{k} \dim(V_j)\,\mathrm{Tr}\left(\hat{P}(\rho_j)\,\hat{Q}(\rho_j)^*\right)$ [Identidad de Planchenel]

$\langle P, Q\rangle = \sum_{g\in G} P(g)\overline{Q(g)}$

(3) $\forall t \in G$

$P(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{k} \dim(V_j)\,\mathrm{Tr}\left(\hat{P}(\rho_j)\,\rho_{V_j}(t)^*\right)$ [Fórmula de inversión de Fourier]

Ejercicio: Lema $\Rightarrow$ Teorema.

Def: Si $P : G \longrightarrow \mathbb{C}$

(1) Para cada rep irreducible ρ_i escoja bases B_i de tal forma que $[\rho_i(g)]_{B_i}$ sea unitaria.

(2)

$$\hat{f}(\rho_i) = \sum_{g\in G} f(g)\,[\rho_i(g)]_{B_i}.$$

Obs: Por ejercicio $\exists!$ módulo escalar prod interno G-invariante en V_i. Luego si B_i y B_i' son bases tales que $[\rho_i(g)]_{B_i}$ y $[\rho_i(g)]_{B_i'}$ son unitarios entonces existe U unitaria: $\left[[\rho_i(g)]_{B_i} = U^* [\rho_i(g)]_{B_i'}\, U \right]$

Recuerde que $\begin{aligned} A' &= U^* A U \\ B' &= U^* B U \end{aligned}$ $\quad Tr(A' B'^*) = Tr(AB^*)$

Ejemplo: Caminatas aleatorias en grupos:

Fije $P: G \longrightarrow \mathbb{C}$ una dist de probabilidad ($P(g) \in \mathbb{R}$, $P(g) \geq 0$, $\sum_{g \in G} P(g) = 1$) y definimos un proceso estocástico así:

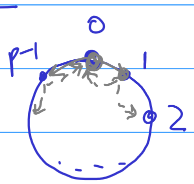
(1) $g_1, g_2, g_3, \dots$ elementos aleatorios de G escogidos independientemente con distribución $\underline{P}$
i.i.d.

(2) $h_j = g_j \cdots g_3 \cdot g_2 \overset{\text{producto en } G}{\cdot} g_1 \quad j \in \mathbb{N}$

Preguntas: ¿Cuál es el comportamiento de h_k? ($\mathbb{P}\{h_k = \alpha\}$, $\alpha \in G$)
¿Qué pasa cuando $k \to \infty$?

Si esperamos k pasos sabemos que
$$\mathbb{P}\{h_k = \alpha\} = \underbrace{P * P * P * \dots * P}_{k\text{-veces}}(\alpha)$$

Ejemplo: Tome $p \in \mathbb{N}$, p impar



$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Sea $Q: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$

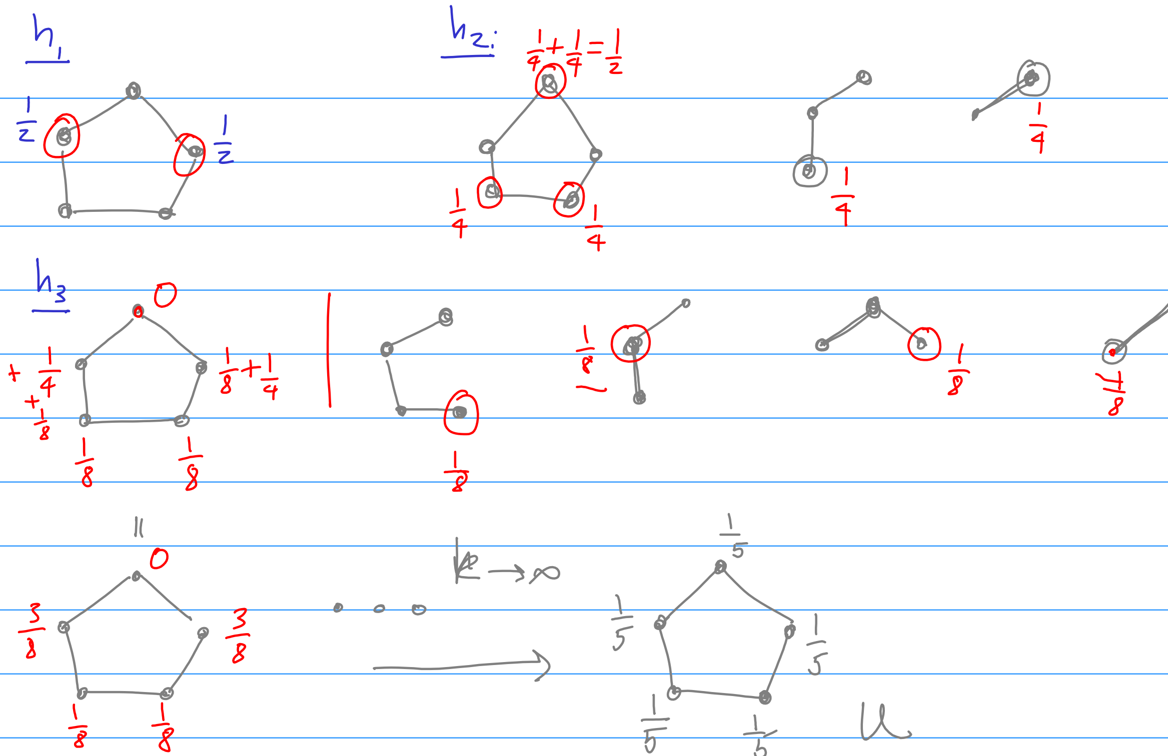
$Q(1) = Q(-1) = \frac{1}{2}$

$Q(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \notin \{1, -1\}$

(1) $g_1, g_2, \dots$ i.i.d. dist Q

(2) $h_k = g_1 + g_2 + \dots + g_k$ ¿Qué pasa con el proceso?

Ejemplo: Tome $p = 5$. ¿Cual es la dist de h_k?
$h_1, h_2, h_3, \dots$



Qué tan rápido?

Def: Si P, Q son dist de prob en un conjunto finito G

Variación total

$$\|P-Q\|_{TV} = \max_{A\subseteq G} |P(A)-Q(A)|$$

$$P(A) := \sum_{a\in A} P(a)$$

$$\sum_{g\in G} f(g)P(g)$$

Ejercicio:

$$\|P-Q\|_{TV} \overset{¿?}{=} \frac{1}{2}\sum_{g\in G} |P(g)-Q(g)| = \max_{f:\|f\|_\infty\leq 1} |\mathbb{E}_P(f)-\mathbb{E}_Q(f)|$$

$$|f(\alpha)|\leq 1 \quad \forall \alpha\in G$$