Resultados de integralidad:

Hoy vamos a describir dos ideas claves

($\underbrace{\text{enteros algebraicos}}_{\text{Alg. conmut}}$ + $\underbrace{\text{racionales}}_{\text{Teo Galois}}$ $\Rightarrow$ enteros)

Def: $\alpha \in \mathbb{C}$ es un entero algebraico (α es entero / $\mathbb{Z}$) si $\exists\ p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ MÓNICO con $p(\alpha) = 0$.

α es ent / $\mathbb{Z} \Leftrightarrow$ (i.e. $\mathbb{Z}[\alpha] \supseteq \mathbb{Z}$ es un mod. f.g sobre $\mathbb{Z}$)

Lema 1a: $R := \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \text{ entero} / \mathbb{Z}\}$ son un subanillo de $\mathbb{C}$ cerrado bajo conjugación.

Lema 1b: $R \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ (i.e. Si α es entero sobre $\mathbb{Z}$ y $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$)

Ejercicio Demostrar Lemas 1a, 1b.

Ejemplo: Sea $\zeta_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ← raíz enésima primitiva de 1.

ζ_n es entero / $\mathbb{Z}$ porque $x^n - 1 = p(x)$ sirve de testigo. Así que toda suma de raíces de la unidad es ent / $\mathbb{Z}$

$[\underbrace{\chi_V(g)}] \in R$ $\forall$ grupo G, $\forall g \in G$ $\forall$ rep.

$|\chi_V(g)|^2 \in R$

$= \chi_V(g)\overline{\chi_V(g)}$

* **Ejercicio:** Demuestre que $\forall$ rep V $\forall g \in G$, $\forall G$ finito $\exists$ una base B que hace que todas las entradas de $[\rho_V(g)]_B$ sean enteros / $\mathbb{Z}$.

(Hint: Considere $\underline{\mathbb{C}G}$)

Idea 2: $\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_n^{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \zeta_n^{k_n} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\zeta_n^{k_1} + \dots + \zeta_n^{k_n}}_{\in\ [\mathbb{Q}(\zeta_n)]}$

Def: Sea ζ_n una raíz enésima primitiva de 1

$\mathbb{C} \supseteq \mathbb{Q}(\zeta_n) :=$ Subcampo de $\mathbb{C}$ generado por $\mathbb{Q}$ y ζ_n.

$$\left[\left[\frac{p(\zeta_n)}{q(\zeta_n)}\right] : \begin{array}{l} p, q \in \mathbb{Q}[x], \\ q(\zeta_n) \neq 0 \end{array}\right]$$

¿Cómo decidir si $\beta \in \mathbb{Q}(\zeta_n)$ es racional?
$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$ $\mathbb{Q}$

Def: $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n), \mathbb{Q}) := \{\psi : \mathbb{Q}(\zeta_n) \to \mathbb{Q}(\zeta_n)$ que son automorfismos de campo y $\psi(\alpha) = \alpha \ \ \forall \alpha \in \mathbb{Q}\}$

Hecho: $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \overset{\text{(1)(2)}}{=} \{k \in [0, \dots, n-1] : (k,n) = 1\}$

(1)
Si $k \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$
$k \mapsto \psi_k \qquad \psi_k(\zeta_n) = \zeta_n^k$

$[\psi_k(\zeta_n + \zeta_n^2 + 3\zeta_n^4) = \psi_k(\zeta_n) + \psi_k(\zeta_n^2) + 3\psi_k(\zeta_n^4)$
$\zeta_n^k + \zeta_n^{2k} + 3\zeta_n^{4k}]$

(2)
Lema 2: Sea $\beta \in \mathbb{Q}(\zeta_n)$. $\beta \in \mathbb{Q} \iff \psi_k(\beta) = \beta \ \ \forall k \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

[$\Leftarrow$ Ejercicio: $\mathbb{Q}(\zeta_n) \supseteq \mathbb{Q}$ es de Galois y $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n), \mathbb{Q}) = U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$]

Ejemplo: Sea G un grupo cíclico finito, sea $S = \{g \in G : \langle g \rangle = G\}$ y sea χ un carácter de G. Si $\chi(s) \neq 0 \ \ \forall s \in S$ entonces

$$\left[\sum_{s \in S} |\chi(s)|^2 \geq |S|\right]$$

Dem: Sea $n = |G|$. Como $o(g) \mid |G|$ todo valor propio de $\rho_V(g)$ es raíz enésima de la unidad así $\chi_V(g) \in \mathbb{Q}(\zeta_n)$, $|\chi_V(g)|^2 \in \mathbb{Q}(\zeta_n)$ pq. $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ es cerrado bajo conjugación.

Sea $s \in S$. $\chi_V(s) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N$ con ε_i raíz enésima de 1

$$\chi_V(s) = \zeta_n^{a_1} + \dots + \zeta_n^{a_N} \qquad \underbrace{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_1^k & 0 \\ 0 & \ddots \ \varepsilon_N^k \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left([\rho_V(s)]_B^k\right)}_{\chi_V(s^k)} =$$

Sea $k : (k,n)=1$

$$\boxed{\begin{matrix} \psi_k(\chi_V(s)) \\ \| \ \updownarrow s^k \\ \chi_V(s^k) \end{matrix}} = \psi_k\left(\zeta_n^{a_1} + \dots + \zeta_n^{a_N}\right) = \zeta_n^{a_1 \cdot k} + \dots + \zeta_n^{a_N \cdot k}$$

con $(k,n)=1$

$$\alpha \longmapsto k \cdot \alpha \qquad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{m_k} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$1 = (k,n)$
$1 = ak + bn$
$1 = \bar{a}\bar{k}$

[Obs: Como $(k,n)=1$ $s^k \in S$ (es otro generador!)
Elev a la k : $[S \longrightarrow S]$ es biyectiva.]

IDEA

$$\beta := \prod_{s \in S} |\chi_V(s)|^2$$ está fijo bajo ψ_k para todo k

$\psi_k(\beta) = \beta \quad \forall k$ con $(k,n)=(1)$

así que $\beta \in \mathbb{Q}$!! $\Longrightarrow$ $\beta \in \mathbb{Z}$

como β es entero$/\mathbb{Z}$

como $\beta \neq 0$, $\beta \in \mathbb{Z}$
$\beta \geq 1$

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{\prod_{s\in S} |\chi_V(s)|^2}$$

Media geo $\leq$ Media aritm.

$$1 \leq \sqrt[|S|]{\prod_{s \in S} |\chi_V(s)|^2} \leq \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} |\chi_V(s)|^2 \quad ✓$$

$$\boxed{|S| \leq \sum_{s \in S} |\chi_V(s)|^2} \quad ✓$$

<u>Teorema</u> (Burnside) Si G es un grupo finito V irrep de G con $\chi_V(g) \neq 0$ $\forall g \in G$ $\Rightarrow \dim(V) \leq 1$.

Dem: Como V es irreducible

$$1 = \langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi_V(g)|^2 \iff |G| = \sum_{g\in G}|\chi_V(g)|^2$$

$$|G| = \dim(V)^2 + \sum_{g\neq e}|\chi_V(g)|^2$$

$g_1 \sim g_2 \iff \langle g_1\rangle = \langle g_2\rangle$
rel de equiv.

$$|G| = \dim(V)^2 + \sum_{C_i \neq [e]}\left[\sum_{g\in C_i}|\chi_V(g)|^2\right] \geq \dim(V)^2 + \underbrace{\sum_{C_i\neq[e]}|C_i|}_{|G|-1}$$

[Podemos pensar a χ_V como el caracter de la rep V restringida a $\langle g\rangle$]

$$|G| \geq \dim(V)^2 + (|G|-1) \Rightarrow 1 \geq \dim(V)^2 \checkmark$$

$\boxed{\text{Teorema:}}$ Si V es una irrep de G entonces $\dim(V) \mid |G|$. (i.e. $\frac{|G|}{\dim(V)} \in \mathbb{Z}$)

Dem: Sea $n = \dim(V)$ y sea $\underbrace{A \in M_{n\times n}}$

$$\underbrace{\psi} = \sum_{g\in G}\underbrace{\rho_V(g^{-1})}\, A\, \underbrace{\rho_V(g)} : V \to V$$

$$\psi\rho_V(h) = \sum_{g\in G}\rho_V(g^{-1})\,A\,\rho_V(gh) = \sum_{u\in G}\rho_V(hu^{-1})\,A\,\rho_V(u) = \rho_V(h)\circ\psi$$

$u = gh$

$uh^{-1} = g$

$g^{-1} = hu^{-1}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\rho_V(h)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V \arrow[d, "\rho_V(h)"] \\ V \arrow[r, "\psi"] & V \end{tikzcd}$$

Por Schur $\quad \psi = \lambda I_V$

$$Tr(\psi) = \sum_{g \in G} Tr\left(\rho_V(g^{-1}) A \rho_V(g)\right) = \lambda \dim(V)$$

$$= \sum_{g \in G} Tr(A) = |G| \, Tr(A)$$

$$\lambda = \frac{|G| \, Tr(A)}{\dim(V)}$$

Sea $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ con $Tr(A) = 1$

$$\left[\underbrace{\sum_{g \in G} (\rho_V(g^{-1}))(A [\rho_V(g)])}_{\text{entradas son TODAS enteros alg.}} \right] = \left[\frac{|G|}{\dim(V)} Id \right]$$

enteros algebraicos por EJERCICIO (*)

$\Rightarrow \frac{p}{q} : \frac{|G|}{\dim(V)}$ es entero / $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ como es $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow \frac{|G|}{\dim(V)} \in \mathbb{Z}$

Luego $\dim(V) \mid |G|$.

Ejercicio: Demuestre que todo χ char de S_n $\forall g \in S_n \quad \chi(g) \in \mathbb{Z}$.