Hoy: + Ejemplos de caminatas aleatorias en grupos.

[Urna de Polya]

Ejemplo: Sea $G = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^d \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ y sea $Q : G \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

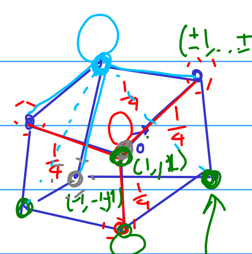
$$Q(g) = \begin{cases} \frac{1}{d+1}, & \text{si } g = \vec{0} \text{ ó } g = e_i \\ 0, & \text{s.l.c.} \end{cases}$$

base canónica

Proceso: (1) $g_1, g_2, \dots$ i.i.d. con dist Q

(2) $h_k = g_k \cdots g_2 g_1 \overset{G \text{ abeliano}}{=} \underbrace{g_k + \dots + g_2 + g_1}$

$d=3$



$\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^d \ni (a_1, \dots, a_d)$, $a_i \in \{0,1\}$

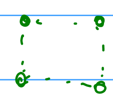
$\downarrow$

$$\left[\left((-1)^{a_1}, \dots, (-1)^{a_d}\right)\right]$$

$x_1, x_2 : X \to \mathbb{C}$

$$\underbrace{\left[\mathbb{C}[x_1 \dots x_n] \big/ (x_1^2 - 1, \dots, x_n^2 - 1)\right]}$$

$d=2$

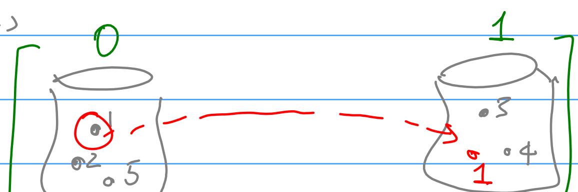


$x_1^2 = 1$
$\vdots$
$x_n^2 = 1$

Cómo se comporta la distribución del proceso después de k pasos? Qué tan lejos de la uniforme se encuentra?

$$\mathbb{P}\{h_k = (a_1, a_2 \dots a_d)\} = \mathbb{P}\{\text{bola } 1 \text{ en } a_1, \dots, \text{bola } d \text{ en urna } a_d\}$$

Imagine que tenemos dos urnas y d pelotas numeradas $1, \dots, d$ distribuidas en ellas



$$\begin{array}{ccccc} (1 & 1 & 0 & 0 & 1) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$\downarrow +e_1$

$$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

Proceso: En cada turno tomamos una pelota cualquiera (de manera unif.) y la cambiamos de urna

Ejercicio: $G \subseteq \mathbb{C}^d$ $\qquad X := i(G)$

$(a_1,\dots,a_d) \xmapsto{\;i\;} \left((-1)^{\varepsilon_1 a_1}, \dots, (-1)^{\varepsilon_d a_d}\right)$

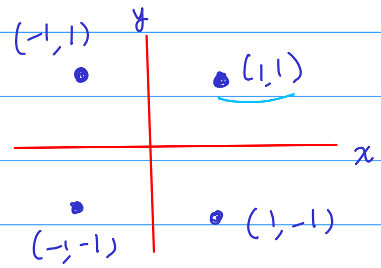
En $\mathbb{C}^d$ hay funciones polinomiales que podemos restringir a X

Si $S \subseteq [d]$ $\qquad \chi_S := \prod_{i\in S} x_i$

$$x_S((\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d)) = \prod_{i\in S} \varepsilon_i$$

Demuestre que los $\underbrace{\chi_S : S \subseteq [d]}$ son los caracteres de G.

Ejemplo: $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ $\qquad d=2$



$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$

$[1, x, y, xy]$

$xy : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ✓

$$xy((\varepsilon_1,\varepsilon_2)\cdot(\nu_1,\nu_2)) = xy(\varepsilon_1\nu_1, \varepsilon_2\nu_2) = \varepsilon_1\nu_1\varepsilon_2\nu_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2\nu_1\nu_2 = xy(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\cdot xy(\nu_1,\nu_2)$$

	$\{(1,1)\}$	$\{(-1,1)\}$	$\{(1,-1)\}$	$\{(-1,-1)\}$
triv	1	1	1	1
x	1	-1	1	-1
y	1	1	-1	-1
xy	1	-1	-1	1

Recuerde que, por el UB Lemma $\qquad \|\hat{Q}(\rho)^k\|_{Fb}^2$

$$\left[\, \|Q^{*k} - U\|_{TV} \leq \frac{1}{4} \sum_{\substack{\rho \neq \text{triv} \\ \rho \text{ irreps}}} \dim(V_\rho)\, \mathrm{Tr}\left(\hat{Q}(\rho)^k\, \hat{Q}(\rho)^{*k}\right) \right]$$

??

Queremos calcular $\hat{Q}(S)$ para $S \subseteq [d]$, $S \neq \emptyset$

$$\hat{Q}(S) = \sum_{\underbrace{g \in G}_{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d}} Q(g)\, \rho_S(g) =$$

$$\chi_S(g) := \prod_{i \in S} \varepsilon_i \qquad g = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_d)$$

i-ésima posición

$$= \left[Q(e)\,\rho_S(e) + \sum_{i=1}^{d} Q\Big(\underbrace{(1,1\ldots 1,-1,1\ldots 1)}_{g_i}\Big)\, \chi_S(g) \right]$$

$$= \frac{1}{d+1}\cdot 1 + \frac{1}{d+1}\Big[(-1)|S| + (d-|S|)\Big] = \frac{1}{d+1}\big(1+d-2|S|\big)$$

$$\chi_S(g) = \begin{cases} -1, & i \in S \\ 1, & i \notin S \end{cases}$$

$$\boxed{\hat{Q}(S) = \frac{(d+1)-2|S|}{d+1} = 1 - \frac{2|S|}{d+1}}$$

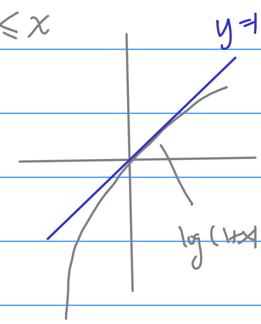
$$\|\hat{Q}(S)^k\|_{F_S}^2 = ($$

$$\|Q^{*k} - U\|_{TV} \le \frac{1}{4} \sum_{\substack{S \subseteq [d] \\ S \neq \emptyset}} 1 \cdot \left(1 - \frac{2|S|}{d+1}\right)^{2k}$$

Qué pasa al variar k?

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{d} \binom{d}{j} \left(1 - \frac{2j}{d+1}\right)^{2k} \right]}_{\text{simple!}}$$

$$\log(1+x) \le x$$



$$\binom{d}{j} = \frac{d(d-1)\cdots(d-j+1)}{j!} \le \frac{d^j}{j!}$$

$$e^{2k \log\left(1 - \frac{2j}{d+1}\right)} \lesssim e^{2k\left(-\frac{2j}{d+1}\right)} = e^{-\left(\frac{4k}{d+1}\right) j}$$

$$\approx \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{d} \frac{d^j}{j!}\, e^{-\frac{4k}{d+1}j} \le \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{d} \frac{\left(d e^{-\frac{4k}{d+1}}\right)^j}{j!}$$

$$= e^{\underbrace{d e^{-\frac{4k}{d+1}}}}$$

Qué tan grande debe ser k para que este número sea pequeño?

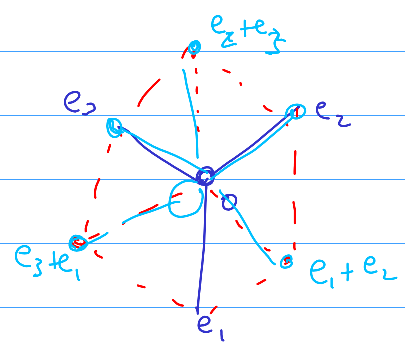
Cutoff

$$\left[k = \left\lceil \underbrace{\frac{1}{4}(d+1)\left[\log(d)\right] + c}\right\rceil\right]$$

$c > 0$

$$d\, e^{-\frac{4k}{d+1}} = d\, e^{-\frac{4}{d+1}(d+1)\left[\log(d)+c\right]} = e^{-c}$$

Ejercicio:



En cada punto podemos movernos ó 0 pasos ó 1 paso ó 2 pasos con la misma probabilidad.

[Qué tanto más rápido se mezcla el proceso?]