Representaciones Inducidas y Restringidas:

Si (ρ, V) es una rep de un grupo G y $H \leq G$ definimos la representación V restringida a H así $(\rho\downarrow_H, V\downarrow_H)$ Es una rep del grupo H

$\rho_{\downarrow H} : H \longrightarrow GL(V)$

$\rho_{\downarrow H}(h) = \rho_V(h)$ $\quad$ $\mathrm{Res}_H^G(V) = (\rho_{\downarrow H}, V_{\downarrow H})$

Pregunta: Si $H \leq G$ y W es una representación de H ¿podemos asociarle una rep de G?

Sí, definiremos la representación inducida en G por W, denotada $\mathrm{Ind}_H^G(W)$

Construcción: Sea W una rep de H $\quad$ $[\rho_W : H \longrightarrow GL(W)$, $(W, \rho_W)]$

Considere $\underbrace{\mathbb{C}G}_{\langle \{e_g : g \in G\} \rangle} \otimes_{\mathbb{C}} W = \{ \sum_{g \in G} e_g \otimes w_g : w_g \in W \}$ elementos arb de W

Ejercicio: Sean U, V e.v. $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$

(a) $U \otimes V = \{ \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i : v_i \in V \}$ (u_i: base, v_i: arb.)

(b) Si $\left[\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i' \right] \Longleftrightarrow [v_i = v_i'] \; \forall i$

En este espacio vectorial hay DOS acciones: (i.e. es una rep de dos maneras)

(1) G actúa por mult a izquierda

$\rho_G(g)(e_t \otimes w) := e_{g \cdot t} \otimes w$ ✓ ($g \cdot t$: producto en G.)

(2) H actúa "a derecha"

$\rho_H(h)(e_t \otimes w) := e_{t \cdot h^{-1}} \otimes \rho_W(h)(w)$ (W es una rep de H; $t \cdot h^{-1}$: prod del grupo)

Lema: ρ_H es una rep de H.

Af.

$$\rho_H(h_1h_2)(e_t\otimes w) \overset{?}{=} \rho_H(h_1)\left[\rho_H(h_2)(e_t\otimes w)\right]$$

$$\rho_H(h_1)\left[e_{th_2^{-1}}\otimes \rho_W(h_2)(w)\right]$$

$$e_{t(h_1h_2)^{-1}}\otimes \rho_W(h_1h_2)(w) \;=\; e_{th_2^{-1}h_1^{-1}}\otimes \rho_W(h_1)(\rho_W(h_2)(w))$$

Note que las acciones ρ_H y ρ_G conmutan

$$\forall g\in G\ \forall h\in H\ \left(\rho_G(g)\rho_H(h)(e_t\otimes w) = \rho_H(h)\rho_G(g)(e_t\otimes w)\right)$$

Dem:

$$\rho_G(g)\left(e_{th^{-1}}\otimes \rho_W(h)(w)\right) = e_{gth^{-1}}\otimes \rho_W(h)(w)$$

$$\rho_H(h)(e_{gt}\otimes w) = e_{gth^{-1}}\otimes \rho_W(h)(w)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}G\otimes W \arrow[r, "\rho_H(h)"] \arrow[d, "\rho_G(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathbb{C}G\otimes W \arrow[d, "\rho_G(g)"] \\
\mathbb{C}G\otimes W \arrow[r, "\rho_H(h)"] & \mathbb{C}G\otimes W
\end{tikzcd}$$

Así que $\forall g\in G$ $\rho_G(g):\mathbb{C}G\otimes W\to \mathbb{C}G\otimes W$ es un morfismo de la rep ρ_H.

Luego las componentes isotípicas de ρ_H quedan fijas bajo $\rho_G(g)$ $\forall g\in G$ (Si $\Lambda\subseteq \mathbb{C}G\otimes W$ es una isot para H $\rho_G(g)(\Lambda)\subseteq\Lambda\ \forall g$.)

En particular la componente trivial de $\underbrace{\rho_H}_{}$ se vuelve una representación de G.

componente isotípica de la trivial de H

$$(\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} W) \supseteq (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} W)^H = \{\text{elementos } x : \rho_H(h)(x) = x \ \forall h \in H\}$$

$$\rho_G(g) : (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} W)^H \longrightarrow \left[(\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} W)^H\right] \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}$$

Def: $$\mathrm{Ind}_H^G(W) := \left(\rho_G|_{(\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} W)^H}, (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} W)^H\right)$$

$$W \xrightarrow{\ j\ } \hat{W}$$

Hecho: $(j, \hat{W}) := \mathrm{Ind}_H^G(W)$ satisface la siguiente propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\forall \psi"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\#"] & \hat{W} \arrow[d, dashed, "\exists!\, \varphi"] \\
& \Lambda
\end{tikzcd}$$

W: rep de H; j: morfismo de H-reps; $\hat{W}$: representación de G; φ: morfismo de G-reps; ψ: lineal, morfismo de H-reps; Λ: representación de G

$$\mathrm{Hom}_H\Big(W, \underbrace{\mathrm{Res}_H^G(\Lambda)}_{\checkmark}\Big) = \mathrm{Hom}_G\Big(\underbrace{\mathrm{Ind}_H^G(W)}_{?}, \Lambda\Big)$$

Res e Ind son adjuntos.

Demostraremos este hecho después, una vez entendamos nuestra construcción de manera más explícita.

(1) ¿podemos construir una base para $\mathrm{Ind}_H^G(W)$?

(2) ¿Cómo son las matrices $\rho_G(g)|_{\mathrm{Ind}_H^G(W)}$?

$\hat{W}$

$\shortparallel$

H) Cómo describir $\underbrace{(\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} W)}^{H}$?

$$\hat{W} = \left\{ \sum_{g\in G} e_g \otimes w_g \overset{\forall h \in H}{=} \rho_H(h)\left(\sum_{g\in G} e_g \otimes w_g\right) \right\}$$

Sea $h \in H$

$$\sum_{g\in G} e_g \otimes w_g = \sum_{g\in G} e_{gh^{-1}} \otimes \rho_W(h)(w_g) \underset{u=gh^{-1}}{=} \sum_{u\in G} e_u \otimes \rho_W(h)(w_{uh})$$

$$\iff \begin{array}{l} \forall g \in G \\ \forall h \in H \end{array} \left[\begin{array}{l} \left(w_g = \rho_W(h)(w_{gh}) \right) \\ \left(\boxed{w_{gh}} = \rho_W(h)^{-1}(w_g) \right) \end{array} \right]$$

__Idea:__ Partimos G mod H en clases laterales

$$G/H = \{ r_i H : i = 0, \dots, \underbrace{|G/H| - 1}_{T} \} \qquad r_0 = e$$

$$\forall g \in G \quad \exists!\, i : \quad g = r_i h'$$

$$\text{Si} \quad \underbrace{\sum_{g\in G} e_g \otimes w_g} \in \hat{W} \subseteq \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} W$$

$$= \sum_{i=0}^{T} \left[\sum_{h\in H} e_{r_i h} \otimes w_{r_i h} \right] \qquad w_{r_i h} = \rho_W(h^{-1})(w_{r_i})$$

$$= \sum_{i=0}^{T} \sum_{h\in H} e_{r_i h} \otimes \rho_W(h^{-1})(w_{r_i})$$

Para $w_{r_i} \in W$, $r_0, r_1, \dots, r_T$

Se sigue que los elementos

$$\left\{ \sum_{h\in H} e_{r_i h} \otimes \rho_W(h^{-1})(w_{r_i}) : w_{r_i} \in W \right\}_{i=0,\dots,T}$$

generan $\hat{W}$

$\boxed{\underline{\text{Lema:}}}$ Sean $w_1, \dots, w_L$ una base para W.
Entonces los elementos

$$\left\{ \sum_{h \in H} e_{\underbrace{r_i h}} \otimes \rho_W(h^{-1})(w_j) \;:\; \begin{array}{l} i = 0, \dots, T \\ j = 1, \dots, L \end{array} \right\}$$

son una base para $\hat{W}$.
En particular $\dim(\hat{W}) = \underbrace{\left| G/H \right|}_{[G:H]} \cdot \dim(W)$