Hoy: Teorema de Reducibilidad completa

"Toda representación es suma directa de reps irreducibles" ⟶ unicidad?

Sea (V, ρ_V) una representación de G

Def: $W \subseteq V$ (subespacio vectorial de V) es un subespacio invariante (ó una subrepresentación) si

$$\forall g \in G \ \forall w \in W \ \left(\rho_V(g)(w) \in W \right)$$

Obs: (1) $\left(W, \underbrace{\rho_V(g)|_W}_{\rho_W(g)}\right)$ es una representación

(2) $W \xrightarrow{i} V$ es un morfismo de reps

$$\forall g \left(\begin{tikzcd} W \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\rho_W(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V \arrow[d, "\rho_V(g)"] \\ W \arrow[r, "i"] & V \end{tikzcd} \right)$$

$$\rho_V(g)(i(w)) \overset{\checkmark}{=} i(\rho_W(g))$$

Vamos a aclarar todas las hipótesis (generalmente están implícitas)

Teorema: Sea G un grupo finito y sea (V, ρ_V) una representación compleja de G de dimensión finita. V es isomorfa a una suma directa de subreps irreducibles de V

Idea:

$W \subseteq V$

como reps

$V = W \oplus W^{\perp}$

$(\Lambda \oplus \Lambda^{\perp}) \oplus W^{\perp}$

$\vdots$

Recuerde que (V, ρ_V) es una rep irreducible si sus únicos subespacios invariantes son $\{0\}$ y V

Dem: Método 1: Construimos un producto hermitiano invariante.

Recuerde: Si V es un espacio vectorial $/\mathbb{C}$ un "producto interno hermitiano" es una función con las siguientes propiedades

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

✓(i) Aditivo en ambas: $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

$\langle u, w_1+w_2\rangle = \langle u,w_1\rangle + \langle u,w_2\rangle$

✓(ii) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

Necesidad? Con un producto $\langle iu, iu\rangle = i^2\langle u,u\rangle = -\langle u,u\rangle$
no podemos obtener (iv) !!

✓(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$

$\langle u, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle u,v\rangle$

(iv) $\langle u,u\rangle \geq 0$ con $\langle u,u\rangle = 0 \iff u=0$

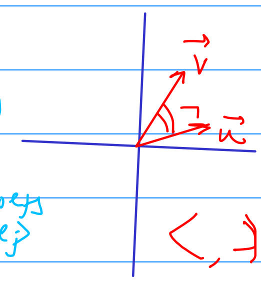
real y ≥ 0

Existencia: $V = \langle\{e_1,\dots,e_n\}\rangle$

$$\left\langle \sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{j=1}^n b_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \bar{b}_j \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{f_{ij}}$$

n^2 coefs $\langle e_i, e_j\rangle$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \quad ✓$$



Clasificación?

$A = \overline{A^t}$

Ejercicio: Demuestre que hay una biyección entre matrices $n\times n$ hermitianas def. pos. y productos internos hermitianos subesp invariante

Continuando con Dem... (V, ρ_V) rep, $W \subseteq V$

paso 1: Construiremos un producto hermítico G-invariante tomando un producto hermítiano $\langle , \rangle$ cualquiera y definiendo

$$\left[\langle u,v\rangle_G := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \rho_V(g)(u), \rho_V(g)(v)\rangle\right] = \int_G \langle \rho_V(g)u, \rho_V(g)v\rangle \, d\mu_G$$

medida de conteo en G

Af: (1) $\langle u,v\rangle_G$ es un producto interno hermítiano ✓

(2) $\langle u,v\rangle_G$ es invariante en el sentido en que

$$\forall g\in G\ \forall u,v\in V\ \Big(\underbrace{\langle u,v\rangle_G = \langle \rho_V(g)u, \rho_V(g)w\rangle_G}_{\text{mis operadores } \rho_V(g) \text{ son UNITARIOS respecto a } \langle , \rangle_G}\Big)$$

Recuerde: si V tiene un producto hermítico $\langle , \rangle$, $T: V \longrightarrow V$ es unitaria ssi

$$[\langle Tu, Tw\rangle = \langle u,w\rangle] \quad \forall u,w\in V$$

Ejercicio: (1) Esto es equivalente a que $\|Tv\| = \|v\|\ \forall v\in V$ donde $\|u\| := \sqrt{\langle u,u\rangle}$

(2) Si $\{u_1,\dots,u_n\} = B$ son base $\langle , \rangle$-ortonormal para V entonces $[T]_B = A$ cumple $A^* = A^{-1}$

traspuesta conjugada

Dem Af: $\langle u,v\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\underbrace{\langle \rho_V(g)(u), \rho_V(g)(w)\rangle}$ lineal

(1) $\langle u,v\rangle_G$ es un prod interno hermítico ((i),(ii),(iii) porque es combinación lineal de formas sesquilineales)

$$\langle u,u\rangle_G = \underbrace{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}}_{\text{coefs} > 0}\underbrace{\langle \rho_V(g)(u), \rho_V(g)(u)\rangle}_{\geq 0} = 0$$

$\Updownarrow$

$\forall g\left(\langle \rho_V(g)(u), \rho_V(g)(u)\rangle = 0\right)$

$\Downarrow$

$\vec{u} = \vec{0}$ ✓

porque

biyección

$$G \to G, \quad g \mapsto gh, \quad gh^{-1} \leftarrow g$$

(2) Sea $h \in G$ $\qquad \langle u, w \rangle_G \overset{?}{=}$

$$\langle \rho_V(h)(u), \rho_V(h)(\vec{w}) \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_V(g)(\rho_V(h)(u)), \rho_V(g)(\rho_V(h)(\vec{w})) \rangle$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_V(gh)(u), \rho_V(gh)(\vec{w}) \rangle$$

$\|$ La suma es conmutativa!

$$\overset{?}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_V(g)(u), \rho_V(g)(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle_G$$

Af: Sea $W \subseteq V$ un subespacio invariante

Si $W^{\perp} := \{ v \in V : \langle v, w \rangle_G = 0 \ \forall w \in W \}$

entonces $W^{\perp} \subseteq V$ es un subespacio invariante.

Dem: Sea $\alpha \in W^{\perp}$, $g \in G$, queremos ver que $\rho_V(g)(\alpha) \in W^{\perp}$

Ver: $\forall w \in W \quad \left(\langle \rho_V(g)(\alpha), w \rangle_G \overset{\smile}{=} 0 \right)$

$\langle , \rangle_G$ es G-invariante $\to \|$

$$\langle \rho_V(g^{-1})(\rho_V(g)(\alpha)), \rho_V(g^{-1})(w) \rangle_G$$

$$\|$$

$$\langle \alpha, \underbrace{\rho_V(g^{-1})(w)}_{\in W} \rangle_G = 0$$

$\uparrow$ $\alpha \in W^{\perp}$

Af 3: $V \cong W \oplus W^{\perp}$ (se sigue de)

Más generalmente, si W y W' son subespacios invariantes de V con $V = W \oplus W'$ (como esp. vectoriales) entonces $V \cong W \oplus W'$ como reps.

Dem

$$\begin{tikzcd} W \oplus W' \arrow[r, "T"] & V \\ (\vec{w}, \vec{w}') \arrow[r, mapsto] & \vec{w} + \vec{w}' \end{tikzcd}$$

isom de espacios vectoriales

Afir: T es morfismo de representaciones

$$\forall g \quad \begin{tikzcd} W \oplus W' \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{\rho_V(g)|_W \oplus \rho_V(g)|_{W'} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)}"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V \arrow[d, "\rho_V(g)"] \\ W \oplus W' \arrow[r, "T"] & V \end{tikzcd}$$

$$T\left(\rho_V(g)|_W \oplus \rho_V(g)|_{W'} (\vec{w}, \vec{w}') \right)$$

$$\parallel$$

$$\rho_V(g)|_W(\vec{w}) + \rho_V(g)|_{W'}(\vec{w}') = \rho_V(g)(\vec{w} + \vec{w}')$$

$$= \rho_V(\vec{g})\left(T(\vec{w}, \vec{w}')\right) \checkmark$$