Hoy: Cómo descomponer V en componentes isotípicas?

(V, ρ_V) rep de G

① $\underline{V_i} \otimes \mathrm{Hom}_G(V_i, V) \xrightarrow{\ ev\ } V$ necesitamos conocer V_i

↑ irreducible

② Queremos hacer esto de manera intrínseca usando información exclusivamente de V

Idea: Estudiar $\mathrm{Hom}_G(V,V) =: \mathrm{End}_G(V)$

Obs: $\mathrm{End}_G(V)$ es un álgebra / $\mathbb{C}$

(es decir un espacio vectorial junto con una multiplicación bilineal)

$T_1 : V \to V$

$T_2 : V \to V$

$T_1 \cdot T_2 := T_1 \circ T_2$ composición de funciones.

Qué estructura tiene $\mathrm{End}_G(V)$?

Si fijamos una base B de V $\quad \mathrm{Hom}_G(V,V) \subseteq \mathrm{Hom}(V,V)$

los elementos de $\mathrm{End}_G(V)$ son matrices T que satisfacen

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\rho_V(g)]_B}"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V \arrow[d, "{[\rho_V(g)]_B}"] \\
V \arrow[r, "T"] & V
\end{tikzcd}$$

$$\forall g \in G \ \left(T \cdot [\rho_V(g)]_B = [\rho_V(g)]_B \cdot T \right)$$

$$\mathrm{End}_G(V) \cong \left\{ T \in \mathbb{C}^{n \times n} : \underbrace{T \cdot [\rho_V(g)]_B = [\rho_V(g)]_B \cdot T}_{\text{Ecuaciones lineales en las entradas de } T} \ \forall g \in G \right\}$$

''

Álgebra conmutante de la representación.

Basta conmutar con los generadores de G

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus V_2^{\oplus a_2} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

Ejercicio: V irreducible. Cómo es $\mathrm{End}_G(V)$?
$\dim(V)=n$ Lema de Schur

$$\mathrm{End}_G(V) = \mathrm{Hom}_G(V,V) \overset{\text{Lema de Schur}}{=} \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

$$\{T \in \mathbb{C}^{n\times n} : T[\rho_V(g)] = [\rho_V(g)]T\} = \{\lambda \mathrm{Id} : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Ejercicio 2: $V = \overset{n_1}{V_1} \oplus \overset{n_2}{V_2}$ irred. distintas

$$\mathrm{End}_G(V) \overset{?}{=} \mathrm{Hom}_G(V_1\oplus V_2, V_1\oplus V_2) = \underbrace{\mathrm{Hom}_G(V_1,V_1)}_{\mathbb{C}} \oplus \cancel{\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)}^{0} \oplus \cancel{\mathrm{Hom}_G(V_2,V_1)}^{0} \oplus \underbrace{\mathrm{Hom}_G(V_2,V_2)}_{\mathbb{C}}$$

$$[\rho_V(g)] = \begin{array}{c|cc} & V_1 & V_2 \\ \hline V_1 & \rho_{V_1}(g) & 0 \\ V_2 & 0 & \rho_{V_2}(g) \end{array}$$

$$\mathrm{Comm}(V) = \left\{ \underbrace{\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \end{array}\begin{array}{c} n_1 \quad\quad n_2 \\ \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \end{array}}_{\text{con respecto a bases de } V_1\oplus V_2} \begin{bmatrix} \rho_{V_1}(g) & 0 \\ 0 & \rho_{V_2}(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{V_1}(g) & 0 \\ 0 & \rho_{V_2}(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} T_{11}\rho_{V_1}(g) & T_{12}\rho_{V_2}(g) \\ T_{21}\rho_{V_1}(g) & T_{22}\rho_{V_2}(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{V_1}(g)T_{11} & \rho_{V_1}(g)T_{12} \\ \rho_{V_2}(g)T_{21} & \rho_{V_2}(g)T_{22} \end{bmatrix}$$

Schur

$$\forall g \in G \begin{cases} T_{11}\rho_{V_1}(g) = \rho_{V_1}(g)T_{11} \Rightarrow T_{11} = \lambda I_{n_1} \\ T_{12}\rho_{V_2}(g) = \rho_{V_1}(g)T_{12} \Rightarrow T_{12} = 0 \end{cases}$$

$\vdots$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\mathrm{Comm}(V) = \{ \lambda_1 I_{n_1} \oplus \lambda_2 I_{n_2} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \}$$

Pregunta: Cómo encontrar la descomposición $V = V_1 \oplus V_2$ usando $\mathrm{Comm}(V)$?

Si T_1 es tal que $[T_1]_B = \left[\begin{bmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2}\end{bmatrix}\right]$

V_1 y V_2 son los espacios propios de T_1 !!

Si $T_1 \in \mathrm{Comm}(V)$

$\left[T_1(v_1) = \lambda_1 v_1 \quad \forall v_1 \in V_1 \quad y \quad T_1(v_2) = \lambda_2 v_2 \quad \forall v_2 \in V_2 \right]$

donde λ_1, λ_2 son los valores propios de T.

$\mathrm{Comm}(V) = \langle C_1, \dots, C_j \rangle$ $\qquad \{(a_1,\dots,a_j) : a_1 C_1 + \dots + a_j C_j$ no sirve$\}$ tiene medida cero.

$\sum a_i C_i = D$ mas diag(D)

Más generalmente, si $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ $\qquad V_i \not\cong V_j \quad i \neq j$

Pasos: (1) $\mathrm{End}_G(V) = \langle C_1, \dots, C_m \rangle$ Álgebra lineal

(2) Construye elemento genérico $D = \sum a_i C_i$ $\qquad a_i$ "random"

(3) Los espacios propios de D son los V_i

Ejercicio 3: $V = V_1 \oplus V_1 = V_1^{\oplus 2}$, cómo es $\mathrm{End}_G(V)$

$$\mathrm{Hom}_G(V,V) = \mathrm{Hom}_G(V_1 \oplus V_1, V_1 \oplus V_1) = \mathrm{Hom}_G(V_1,V_1) \oplus \mathrm{Hom}_G(V_1,V_1) \oplus \mathrm{Hom}_G(V_1,V_1) \oplus \mathrm{Hom}_G(V_1,V_1)$$

$$\mathrm{Hom}_G(V_1,V_1) \cong \mathbb{C}^4$$

$$\mathrm{Com}(V) = \left\{ \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_1(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_1(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \right\}$$

$$T_{12}\,\rho_1(g) = \rho_1(g)\, T_{12} \Rightarrow T_{12} = \lambda\, \mathrm{Id}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} c_{11} I_{n_1} & c_{12} I_{n_1} \\ c_{21} I_{n_1} & c_{22} I_{n_1} \end{pmatrix} : c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}_{M_2} \otimes I_{n_1} : c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \left\{ M_2 \otimes I_{n_1} : M_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2} \right\}$$

$$\begin{array}{cc} V_1 \cdots V_1 & V_2 \cdots V_k \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} M_1 \otimes \mathrm{Id} & 0 & 0 \\ 0 & M_2 \otimes \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 & M_k \otimes \mathrm{Id} \end{bmatrix}$$

En general, si $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$

$$\mathrm{End}_G(V) \cong \left\{ (M_1 \otimes I_{d_1}) \oplus (M_2 \otimes I_{d_2}) \oplus \cdots \oplus (M_k \otimes I_{d_k}) : \begin{matrix} M_1 \in \mathbb{C}^{a_1 \times a_1} \\ \vdots \\ M_k \in \mathbb{C}^{a_k \times a_k} \end{matrix} \right\}$$

$$\dim(\mathrm{End}_G(V)) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \qquad \mathrm{End}_G(V) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{C}^{a_i \times a_i}$$

Cuál es el centro de $End_q(V)$?

Ejercicio: Sea $A = \mathbb{C}^{n\times n}$ (matrices $n\times n$ en $\mathbb{C}$)
demuestre que

$$Z(A) := \{B \in A : B\cdot T = T\cdot B \ \forall T \in A\} = \{\lambda\, Id : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Más ecuaciones lineales en B

Calculamos $Z(\underbrace{End_q(V)})$

$$\left[\left(\underbrace{\bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{M_i} \otimes I_{d_i}}_{W}\right) \cdot \left(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i \otimes I_{d_i}\right) = \left(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i \otimes I_{d_i}\right)\cdot W\right]$$

$$\| $$

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \left[(M_i \otimes Id_i)\cdot(N_i \otimes Id_i)\right]$$

$$\|$$

$$\bigoplus_{i=1}^{k} M_i N_i \otimes Id_i = \bigoplus_{i=1}^{k} N_i M_i \otimes Id_i$$

$\Rightarrow$ M_i conmuta con N_i $\forall N_i$

$M_i \in Z(\mathbb{C}^{a_i \times a_i}) \Rightarrow M_i = \lambda I_{a_i}$

$$Z(End_q(V)) = \left\{\bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i (I_{a_i} \otimes I_{d_i}) : \lambda_i \in \mathbb{C}\right\}$$

$$\dim(Z(End_q(V))) = k$$

Para encontrar la descomposición en isotípicas:

(1) Calculamos $Z(End_q(V))$

(2) D elemento "aleatorio"

(3) Los espacios propios de D son las componentes isotípicas!!