Hoy: ① Review de clase anterior

② Teoría de caracteres 1

① Sea (V, ρ_V) una representación. Cómo entender $\mathrm{End}_G(V) := \mathrm{Hom}_G(V,V)$ (álgebra)?

Teorema: Suponga que $V = \left(V_1^{\oplus a_1}\right) \oplus \cdots \oplus \left(V_k^{\oplus a_k}\right)$ V_i irrep no isomorfas

Tomamos bases compatibles con la desc de arriba $B = \{ \overbrace{\underbrace{\quad}_{V_1}, \underbrace{\quad}_{V_1}, \dots, \underbrace{\quad}_{V_1}}^{a_1}, \dots \}$

(1) $$\mathrm{End}_G(V) \cong \left\{ \bigoplus_{i=1}^{k} M_i \otimes I_{d_i} : \begin{array}{l} M_i \in \mathbb{C}^{a_i \times a_i} \\ d_i = \dim(V_i) \end{array} \right\}$$

en particular

$$\dim(\mathrm{End}_G(V)) = a_1^2 + \dots + a_k^2 \quad \text{y} \quad \mathrm{End}_G(V) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{C}^{a_i \times a_i}$$

$\cong$ como álgebras

(2) $$Z(\mathrm{End}_G(V)) := \{ T \in \mathrm{End}_G(V) : T \circ A = A \circ T \quad \forall A \in \mathrm{End}_G(V) \}$$

$$\cong \left\{ \bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i I_{a_i} \otimes I_{d_i} : \lambda_i \in \mathbb{C} \right\} \leftarrow \text{matrices diagonales}$$

en particular

$$\dim(Z(\mathrm{End}_G(V))) = k \quad \text{y} \quad Z(\mathrm{End}_G(V)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{C}$$

Consecuencia: Algoritmo para encontrar la descomposición en isotípicas:

(1) Usando álgebra lineal en cualquier base calculamos

$\mathrm{End}_G(V,V)$, $Z(\mathrm{End}_G(V,V))$

$T: V \to V$

$\forall g \in G \; (T \rho_V(g) = \rho_V(g) T)$

basta buscar g's en un conjunto de gens cualquiera

lineal en T

$\{A_1, \dots, A_f\}$ base

$\{ B \in \mathrm{End}_G(V,V) : \begin{array}{l} B \cdot A = A \cdot B \\ \forall A \in \mathrm{End}_G(V) \end{array} \}$

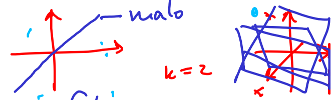
$=$

$\{ B \in \mathrm{sp}(A_1, \dots, A_f) : B A_i = A_i B \;\; \forall i \}$

lineal en B

$\{C_1, \dots, C_j\}$

$$Z(\mathrm{End}_G(V)) = \Big\langle \underline{I_{a_i} \otimes Id_i}\ ,\ i=1,\dots,k \Big\rangle$$ $\lambda\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



$\mathbb{C}^{k^2} = \{\underline{(\lambda_1,\dots,\lambda_k)}\}$ $\quad \lambda_i = \lambda_j$, $i \neq j$ $\qquad (c_1 \dots c_j) \mapsto D = c_1 C_1 + \dots + c_j C_j$

(2) Tome un elemento "aleatorio" del $\langle C_1, \dots, C_j \rangle = Z(\mathrm{End}_G(V))$

y note que tiene espacios propios iguales a las comp isotípicas. Llámelo D

como D tiene valores propios distintos

Los espacios propios de D son precisamente las componentes isotípicas de V. (diagonalizar D resuelve el problema).

$$\begin{array}{cccc} & V_1 & V_2 & V_3 \\ & \begin{bmatrix} \lambda I & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\eta I} & 0 \\ 0 & 0 & \delta I \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{aligned} E_\lambda &= V_1 \\ E_\eta &= V_2 \\ E_\delta &= V_3 \end{aligned}$$

$(a_i \cdot d_i) \times (a_i d_i)$

$V_i^{\oplus a_i}$

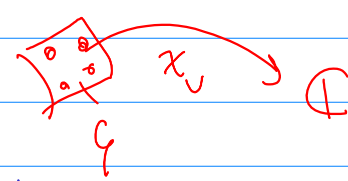
Problema: ¿Cómo describir todas las representaciones irreducibles de un grupo dado G?

Herramienta — Teoría de caracteres

Sea (V, ρ_V) una representación de G

Def. El caracter de (V, ρ_V) es una función $\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\boxed{\chi_V(g) = \mathrm{tr}(\rho_V(g))}$$



Obs:

$\chi_V(g)$ es fácil de calcular porque es el mismo en cualquier representación matricial

Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de V entonces

$$[\rho_V(g)]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[\rho_V(g)]_{\mathcal{B}'}P$$

$tr(CAD)$ $\|$ $tr(ABC) = tr(BCA)$

donde P es invertible así que

$$\underbrace{tr([\rho_V(g)]_{\mathcal{B}})}_{\chi_V(g)} = tr(P^{-1}[\rho_V(g)]_{\mathcal{B}'}P) = \underbrace{tr([\rho_V(g)]_{\mathcal{B}'}\cancel{P}\cancel{P^{-1}})}_{\chi_V(g)}$$

(2) $\chi_V(\cdot)$ es constante en clases de conjugación de G

$\forall h\in G$ $\forall g\in G$ $\quad \chi_V(g) = \chi_V(h^{-1}gh)$

Dem: $\chi_V(h^{-1}gh) = tr(\rho_V(h^{-1}gh)) = tr(\rho_V(h)^{-1}\rho_V(g)\rho_V(h))$
$= tr(\rho_V(g)) = \chi_V(g)$.

(3) Los caracteres se comportan muy bien respecto a las operaciones entre representaciones que ya definimos. Concretamente tenemos que si (V,ρ_V) y (W,ρ_W) son reps de G entonces:

(a) $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$

(b) $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$

(c) $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$

(d) $\forall g\left(\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left[\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\right]\right)$

$\forall g\left(\chi_{Sym^2(V)}(g) = \frac{1}{2}\left[\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)\right]\right)$

Lema (de Álgebra lineal - descomposición de Schur) Toda matriz compleja es semejante a una matriz triangular superior y las entradas diagonales son precisamente las raíces del polinomio característico con sus multiplicidades. ✓

$$V \xrightarrow{T} V \qquad B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$$

$$[T]_B = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \quad \lambda_n \end{bmatrix} \end{array} \qquad \det(xI - [T]_B) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$

$$T\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$$

$$T\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 + a\vec{v}_1, \qquad T(\vec{v}_2) \subseteq \langle v_1, v_2\rangle$$

$$T v_3 = \lambda_3 v_3 + a' \vec{v}_1 + b'\vec{v}_2, \quad T(\vec{v}_3) \subseteq \langle v_1, v_2, v_3\rangle$$

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \dots \subseteq V_n$$

$$\langle \vec{v}_1\rangle \subseteq \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle \subseteq \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\rangle \subseteq \dots \subseteq \langle \vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\rangle$$

$$T(V_i) \subseteq V_i \qquad \dim(V) \underset{= n}{<} \infty \qquad V/\mathbb{C}$$

$\boxed{\text{Lema:}}$ Todo operador $T: V \longrightarrow V$ tiene una bandera $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_n$ de subespacios invariantes $T(V_i) \subseteq V_i \quad \forall i$.

(ind) base $\dim(V) = 1$ ✓

Dem: Como $\mathbb{C}$ es alg cerrado existe $\vec{v} \neq 0$ vector propio de T

$$T\vec{v} = \lambda \vec{v}. \quad \lambda \in \mathbb{C}. \qquad V_1 := \langle \vec{v}\rangle$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V \arrow[d, "q"] \\ W = V/V_1 \arrow[r, dashed, "Q"] & V/V_1 = W \end{tikzcd}$$

$$Q(\vec{v} + V_1) := q(T(\vec{v}))$$

si $v_1 \in V_1$

$$Q(v_1) = q(T(v_1)) = q(\lambda v_1) = 0$$

Por inducción existe un flag Q-invariante en Q

$$W_2 \subsetneq W_3 \subsetneq \dots \subsetneq W_n = W$$

$$Q(W_i) \subseteq W_i$$

<u>Af:</u> $V_1 \subsetneq q^{-1}(W_2) \subsetneq \dots \subsetneq q^{-1}(W_n) = V$

es una bandera de subespacios T invariante. ✓

<u>Sublema:</u> Si $W' \subseteq W$ es Q-invariante $\Rightarrow$ $q^{-1}(W')$ es T-invariante

<u>Dem:</u> Sea $p \in \underline{q^{-1}(W')}$ <u>Af:</u> $T(p) \in q^{-1}(W')$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q"'] & V \arrow[d, "q"] \\ W \arrow[r, "Q"] & W \end{tikzcd}$$

$q(p) = w'$, $w' \in W'$

$$q(T(p)) = Q(q(p)) = Q(w') \in W'$$

$$\overset{\shortparallel}{v'} \in W'$$

$$\Rightarrow T(p) \in \underline{q^{-1}(W')}$$

<u>Dem:</u> $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$

Dado g escoja bases B_1 de V y B_2 de W tales que

$$[\rho_V(g)] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad [\rho_W(g)] = \begin{bmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \ddots & \eta_m \end{bmatrix}$$

Tomando las bases $\mathcal{B}_{V \otimes W} = \{ v \otimes w : v \in B_1, w \in B_2 \}$

[

$$[\rho_V(g) \otimes \rho_W(g)] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \begin{bmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \ddots & \eta_m \end{bmatrix} & & 0 \\ 0 & \lambda_2 \begin{bmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \ddots & \eta_m \end{bmatrix} & 0 \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \begin{bmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \ddots & \eta_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$tr\left(\rho_V(g)\otimes\rho_W(g)\right) = \begin{matrix}\lambda_1\eta_1+\dots+\lambda_1\eta_m+\\ \lambda_2\eta_1+\dots+\lambda_2\eta_m+\\ \vdots \\ \lambda_n\eta_1+\dots+\lambda_n\eta_m\end{matrix} = (\lambda_1+\dots+\lambda_n)(\eta_1+\dots+\eta_m)$$

$$= tr\left(\rho_V(g)\right)\cdot tr\left(\rho_W(g)\right)$$

así que $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$ ✓