Propiedades básicas de caracteres:

Def: Sea (V, ρ_V) una rep de G. Definimos

$$\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$g \longmapsto Tr(\rho_V(g))$$

Hoy mostraremos que el caracter de una rep. la determina de manera única módulo isomorfismo.

(Recordar $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$, ...)

Recapitulación de álgebra lineal.

Sea V un espacio vectorial

Def: $\varphi \in Hom(V,V)$ es una **proyección** si satisface $\boxed{\varphi^2 = \varphi}$ $\quad V \xrightarrow{\varphi} V$

Lema: Si φ es una proyección entonces tenemos:

$U := im(\varphi)$, $W := ker(\varphi)$

(1) $U \oplus W = V$

(2) (a) $\varphi(u) = u$, $\forall u \in U$

(b) $\varphi(w) = 0$ $\quad \forall w \in W$

(3) En bases que respeten la descomposición tenemos

$$[\varphi]_B = \begin{array}{c|cc} & U & W \\ \hline U & I_d & 0 \\ W & 0 & 0 \end{array} \qquad d = dim(U)$$

(4) $\boxed{tr(\varphi) = dim(U) = dim(im(\varphi))}$

Ejercicio: Demuestre el Lema.

Notación: Sea (V, ρ_V) una rep

$$V^G = \{ v \in V : \forall g \in G \ (\underbrace{\rho_V(g)\vec{v} = \vec{v}}) \}$$

subespacio invariante
"
componente isotípica de la rep. trivial

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\oplus a_k} \qquad V_1 - \text{trivial}$$

$$V = (V^G) \oplus V_2^{\oplus a_2} \oplus \dots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

$$\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

Teorema: Para toda rep (V, ρ_V) tenemos:

$$\boxed{\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) = \underbrace{\dim(V^G)}}$$

Dem: $V \xrightarrow[\text{lineal}]{\rho_V(g)} V$

Considere la transformación lineal

$$\varphi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_V(g) \in \mathrm{Hom}(V, V)$$

(1) Si $v \in \underbrace{V^G}$ entonces $\varphi(v) = v$

$$\varphi(\vec{v}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_V(g)(\vec{v}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vec{v} = \vec{v}$$

(2) $\varphi(\varphi(\vec{v})) = \varphi(\vec{v})$ $\Big\}$ $*$ (es decir $\varphi^2 = \varphi$ así que φ es una proyección)

y $\operatorname{im}(\varphi) = V^G$ ✓

Si sabemos $*$ del Lema anterior

$$\operatorname{Tr}(\varphi) = \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = \dim(V^G)$$

$$\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_V(g)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{Tr}(\rho_V(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$$ ✓

(2) Como $\varphi(v) = v$ $\forall v \in V^G$, $V^G \subseteq \operatorname{im}(\varphi)$

Falta la otra inclusión.

Sea $\vec{\beta} = \varphi(\vec{w})$, $\vec{w} \in V$ A ver: $\vec{\beta} \in V^G$

Sea $h \in G$

$$\rho_V(h)(\vec{\beta}) = \rho_V(h)(\varphi(\vec{w})) = \rho_V(h)\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(\vec{w})\right)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_V(h)\rho_V(g)(\vec{w}) = \frac{1}{|G|}\underbrace{\sum_{g\in G}\rho_V(hg)}_{\text{suma sobre todo el grupo}}(\vec{w})$$

$$= \varphi(\vec{w}) = \vec{\beta}$$

$$\Rightarrow \vec{\beta} \in V^G$$

Sea $\vec{w} \in V$, $\varphi(v) \in V^G$ así que

$\varphi(\varphi(v)) = \varphi(v)$, como v arbitrario $\varphi^2 = \varphi$ ✓

Ejercicio: Demuestra que φ es un morfismo de representaciones. $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V,V)$.

Recuerde que si V y W son reps

$$\mathrm{Hom}_G(V,W) = \mathrm{Hom}(V,W)^G \subseteq \underbrace{\mathrm{Hom}(V,W)}_{\text{rep de } G}$$

Así que los carácteres de dos representaciones nos permiten entender la dimensión del espacio de morfismos de reps entre ellas.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \Big\downarrow \rho_V(g) & & \Big\downarrow \rho_W(g) \\ V & \xrightarrow{\rho_W(g) T \rho_V(g)^{-1}} & W \end{array}$$

$$\rho_W(g) T \rho_V(g)^{-1} = \rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)(T)$$

$T \in \mathrm{Hom}(V,W)^G$ ssi $\forall g \in G \quad \rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)(T) = T$

$$\rho_W(g)\, T\, \rho_V(g)^{-1} = T$$

$$[\rho_W(g)\, T = T\, \rho_V(g)]$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \Big\downarrow \rho_V(g) & \# & \Big\downarrow \rho_W(g) \\ V & \xrightarrow{T} & W \end{array}$$

Dados χ_V, χ_W cómo calculamos $\chi_{Hom(V,W)}$?

Recuerde que como reps

$$Hom(V,W) \cong V^* \otimes W$$

$$\chi_{Hom(V,W)}(g) = \chi_{V^*\otimes W}(g) = \chi_{V^*}(g) \cdot \chi_W(g)$$

$$= \overline{\chi_V(g)} \cdot \chi_W(g)$$

Así que

Teorema: Si (V, ρ_V) y (W, ρ_W) son reps de G tenemos

$$\boxed{\dim(Hom_G(V,W)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}\, \chi_W(g)}$$

Corolario: Si $V_1, \dots, V_k$ son reps irreducibles distintas de G entonces las funciones $\chi_{V_1}, \chi_{V_2}, \dots, \chi_{V_k}$ son un conjunto ortonormal en $\underbrace{Fun(G, \mathbb{C})}_{\mathbb{C}^{|G|}}$

$$\left(Fun(G,\mathbb{C}), \langle , \rangle\right) \qquad \langle f, h\rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{f(g)}\, h(g)$$

Dem: Por Lema de Schur

$$\underbrace{\dim\left(\mathrm{Hom}_G(V_i, V_j)\right)}_{\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{si } i=j \\ 0, & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

Consecuencia: (1) El carácter de una representación la determina de manera única módulo isomorfismo.

$$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

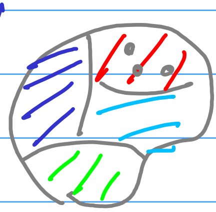
$$\chi_V = a_1 \chi_{V_1} + \cdots + a_k \chi_{V_k}$$

$$\boxed{a_i = \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle}$$

Por ortonormalidad

(2) El número de irreps distintas de G es $\leq$ # clases de conjug de G

χ_V



irreps de G

$$\{\chi_{V_1}, \dots, \chi_{V_k}\} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathrm{Fun}(G, \mathbb{C})$$

$\mathcal{H}$: Funciones constantes en clases de conjugación

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}) \overset{?}{=}$ # de clases de conjugación
$\quad\quad\quad\;\, \cup\!|$

Por ortonormalidad $\chi_{V_1}, \ldots, \chi_{V_k}$ son lin. indep.
así que
$$\dim(\langle \chi_1, \ldots, \chi_k \rangle) = k$$

"$\subseteq$" $\Rightarrow$ $k \leq$ # de clases de conjugación. $< \infty$