Hoy: Caracteres de S_3

$\forall V$ $\left(\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C} \right.$ constante en clases de conjugación. $\left. \right)$

Recuerde que si G es un grupo, definimos

$g_1 \sim g_2 \iff \exists\ h \in G : \ h^{-1} g_1 h = g_2$

$\sim$ es de equivalencia y por lo tanto parte a G en clases "de conjugación".

¿Cómo son las clases de conjugación de S_n?

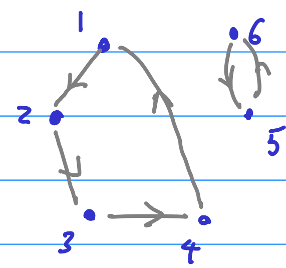
$$S_n = \{ f : \underbrace{[n]}_{``\{1,\dots,n\}} \longrightarrow [n] \ \ f \text{ biyectiva} \}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$\underbrace{(1234)}(56) \quad 6 = 4+2 \quad \binom{6}{4}$$

Como producto de ciclos disyuntos



$$h^{-1} g_1 g_2 h = (h^{-1} g_1 h)(h^{-1} g_2 h)$$

Ejercicio: (Clases de conjugación de S_n)

(a) ¿Qué significa conjugar?

$$\begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, "f"] & {[n]} \\ {[n]} \arrow[u, "h"] \arrow[r, dashed, "h^{-1}\circ f \circ h"] & {[n]} \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

cambia los "nombres" de los elementos de $[n]$

es decir:

$$(35)\underbrace{(1234)}(35) = (1254)$$

(b) Demuestre que las clases de conjugación de S_n están en biyección con las particiones de n

(i.e. $4 = 3+1$, $4 = 2+2$, $4 = 2+1+1$, $4 = 1+1+1+1$ |

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ $\quad \lambda_i \in \mathbb{Z}$ $\quad \boxed{4 \vdash (3,1)}$ $\ \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ 0 \ 1$

$n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$)

(c) Encuentre una fórmula para el tamaño de la clase de conjugación de $n \vdash (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

(d) Qué tan rápido crece $p(n) = \#$ de particiones de n?

En S_3

$(312) = (231)$ $\left\{\begin{array}{l}(213)\\(123)\end{array}\right\}$

$3 = 3$ — (123) — 2

$3 = 2+1$ — (12) — 3

$3 = 1+1+1$ — e — 1

$\chi_V(e) = Tr(\rho(e)) = \dim(V)$

$k \leq \#$ clases de conjug.

** Tabla de caracteres

	1	3	2
	e	(12)	(123)
trivial	1	1	1
sgn	1	-1	1
U	2	0	-1

Estas son TODAS las irreps de S_3 !!

$U = (1,1,1)^{\perp} \subseteq \underbrace{\mathbb{C}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle}$ — W

$S_3 \curvearrowright \mathbb{C}^3$ por permutaciones.

Calcule el carácter de U.

Sol (1): Calculemos χ_W

χ_W	3	1	0

$$\chi_W(e) = Tr(\rho_W(e)) = 3$$

$$\chi_W((12)) = Tr\left(\begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & 1 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = 1$$

$$\chi_W((123)) = Tr\left(\begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = 0$$

$$\chi_W = \chi_{triv} + \chi_U \qquad (W = triv \oplus U)$$

$$\chi_U = \chi_{triv} - \chi_W$$

$$E \curvearrowright S_3 \implies E \underset{\text{Reps.}}{\cong} \mathrm{triv}^{\oplus a_1} \oplus \mathrm{sgn}^{\oplus a_2} \oplus U^{\oplus a_3}$$

$$U \otimes U = \mathrm{Sym}^2(U) \oplus \Lambda^2(U)$$

Ejercicio:

ⓐ $[U\otimes U \cong \mathrm{triv} \oplus \mathrm{sgn} \oplus U]$ — Plethysms

ⓑ $\mathrm{Sym}^2(U) = \mathrm{triv} \oplus U$

ⓒ $\Lambda^2(U) = \mathrm{sgn}$

$$[\mathrm{Sym}^a(\mathrm{Sym}^b(U))]$$

Solución: Usamos caracteres!

ⓐ
$$\chi_{U\otimes U} = \chi_U \cdot \chi_U : \begin{array}{ccc} e & (12) & (123) \\ \hline 4 & 0 & 1 \end{array}$$

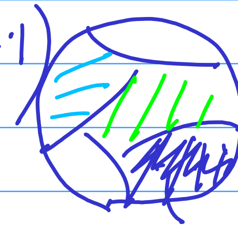
$$\chi_{U\otimes U} = a\,\chi_{\mathrm{triv}} + b\,\chi_{\mathrm{sgn}} + c\,\chi_U$$

$$a = \langle \chi_{U\otimes U}, \chi_{\mathrm{triv}} \rangle,\quad b = \langle \chi_{U\otimes U}, \chi_{\mathrm{sgn}} \rangle,\quad c = \dots$$

$$\langle \chi_{U\otimes U}, \chi_T \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \left(\overline{\chi_{U\otimes U}(g)}\, \chi_T(g) \right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{\text{Clases de} \\ \text{conjug} \\ C}} [\#C] \underbrace{\left(\overline{\chi_{U\otimes U}(g_C)}\, \chi_T(g_C) \right)}_{g_C \in C}$$

$$\langle \chi_{U\otimes U}, \chi_{\mathrm{triv}} \rangle = \frac{1}{6}\left(1\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 \right)$$



G

$$= \frac{1}{6}\cdot 6 = 1$$

$$\langle \chi_{U\otimes U}, \chi_{\mathrm{sgn}} \rangle = \frac{1}{6}\left(1\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot (-1) + 2\cdot 1\cdot 1 \right)$$
$$= 1$$

$$\lambda + \lambda + \lambda \dots + \lambda = |C|\cdot\lambda$$

$$\langle \chi_{u\otimes u}, \chi_u \rangle = \frac{1}{6}\left(1\cdot 4\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot(-1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 6 = 1 \checkmark$$

(b) $$\chi_{Sym^2(W)}(g) = \frac{\chi_W(g)^2 + \chi_W(g^2)}{2}$$

$$\chi_{Sym^2(U)}(e) = \frac{\chi_u(e)^2 + \chi_u(e^2)}{2} = \frac{2^2+2}{2} = 3$$

$$\chi_{Sym^2(U)}((12)) = \frac{\chi_u(12)^2 + \chi_u((12)^2)}{2} = \frac{0^2+2}{2} = 1$$

$$\chi_{Sym^2(U)}((123)) = \odot \ldots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3 \quad 1 \quad 0 \,? \checkmark$$

Problema: Dado G:
(i) Describir reps de G
(ii) Describir los caracteres de G.

De donde las sacamos?

Lema: $\mathbb{C}G = \{\sum a_g e_g : g \in G\}$

$e_h \cdot e_g := e_{h\cdot g}$ Representación regular izquierda

$$\chi_{\mathbb{C}G}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{C}G}: \quad |G|, 0, \dots, 0}$$

$$\rho(h) = \begin{array}{c|c} & e_e \quad e_{g_1} \dots \quad e_{g_{n-1}} \\ \hline \begin{array}{c} e_e \\ \vdots \\ e_{g_{n-1}} \end{array} & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ & & \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

matriz de permutación

$$e_h \cdot e_{g_i} = e_{g_i}$$

$$h \circ g_i = g_i \Leftrightarrow h = e \quad G \text{ es grupo}$$

Si $h \neq e \Rightarrow \rho(h)$ tiene diag $\vec{0}$.

$$Tr(\rho(h)) = 0$$

Corolario: Si V_i es una rep irreducible de G entonces aparece $\dim(V_i)$ veces en $\mathbb{C}G$.

Dem: $$\langle \chi_{V_i}, \chi_{\mathbb{C}G} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} \underbrace{\chi_{\mathbb{C}G}(g)}_{\substack{0 \\ \text{si } g \neq e}}$$

$$= \frac{1}{|G|} \overline{\chi_{V_i}(e)} \chi_{\mathbb{C}G}(e) = \dim(V_i) \checkmark$$

$$\mathbb{C}G = V_1^{\dim(V_1)} \oplus V_2^{\dim(V_2)} \oplus \dots \oplus V_k^{\dim(V_k)}$$

donde V_i son TODAS las irreps de G.

$\dim(\mathbb{C}G) = |G|$