Lema: Para todo grupo G tenemos

$$\mathbb{C}G \cong \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{\dim(V_i)}$$

donde $V_1, \dots, V_k$ son <u>TODAS</u> las reps irreducibles de G.

Dem: $\mathbb{C}G \cong \bigoplus_{i=1}^{m} W_i^{\oplus a_i}$ donde W_i son irreps distintas.

$$\chi_{\mathbb{C}G} = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{W_i}$$

Por ortonormalidad de caracteres de irreps

$$a_i = \langle \chi_{\mathbb{C}G}, \chi_{W_i} \rangle$$

Ahora $\chi_{\mathbb{C}G}(g) := Tr(\rho(g))$

$$\rho(g)(e_h) := e_g \cdot e_h := e_{gh} \text{ — del grupo}$$

$\rho(g)$ es una matriz de permutación en $B = \{e_g : g \in G\}$. Luego

$Tr(\rho(g)) = \#$ de ptos fijos

$$e_g \cdot e_h = e_h \iff g \cdot h = h \iff g = e$$

Así que

$$\chi_{\mathbb{C}G}(h) = \begin{cases} |G|, & \text{si } h = e \\ 0, & \text{si } h \neq e \end{cases}$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{C}G} = [\,|G|, 0, \dots, 0\,]}$$

Si V_i es irrep de G

$\chi_{V_i} = [\dim(V_i), x, x, \dots]$

$\langle \chi_{\mathbb{C}G}, \chi_{V_i} \rangle = \frac{1}{\cancel{|G|}} \cancel{|G|} \cdot \underline{\dim(V_i)} > 0$ ✓

Ejemplo: $\mathbb{C}S_3 = \text{triv} \oplus \text{sgn} \oplus U^{\oplus 2}$

$\boxed{\text{Lema:}}$ Si $W = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{\oplus a_i}$ V_i irreps distintas

$$\sqrt{\langle \chi_W, \chi_W \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} = \|\vec{a}\|_2$$

Dem: $\chi_W = a_1 \chi_{V_1} + \dots + a_k \chi_{V_k}$

ortonormalidad!

$$\langle \chi_W, \chi_W \rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_i a_j \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i^2$$

Consecuencia: W es irred $\iff \langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$

Ejemplo: $\langle \chi_{\mathbb{C}G}, \chi_{\mathbb{C}G} \rangle = \frac{1}{\cancel{|G|}} |G|^{\cancel{2}} = |G|$

$$= \sum_{i=1}^{k} \dim(V_i)^2$$

$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$

$6 = |S_3|$, 1: sgn, 1: triv, 2: $\mathbb{1}^\perp \subseteq \mathbb{C}^3$

Problema: Describa las irreps de S_4 (tabla de caracteres)

Ejercicio: Calcular la tabla de chars de S_5 y dar alguna construcción de todas las irreps.

Sabemos que $k \leq$ [# Clases de conjugación]

	1	6	3	8	6
	e	(12)	$(12)(34)$	(123)	(1234)
tr	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	1	-1
U	3	1	-1	0	1
$sgn \otimes U$	3	-1	-1	0	-1
V	2	0	2	-1	0

$[\chi_W = (4, 2, 0, 1, 0)]$

Sea $W = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$, $S_4 \curvearrowright W$ por permutaciones

$$\underbrace{\langle \chi_W, \chi_W \rangle}_{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_W(g)}\chi_W(g)} = \frac{1}{24}\left(16 + 6\cdot 2^2 + 8\cdot 1^2\right) = \boxed{2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2}$$

La única posibilidad es $2 = 1^2 + 1^2$

$\text{Span}(e_1+e_2+e_3+e_4) \subseteq W$ es una copia de la trivial

$U = (e_1+e_2+e_3+e_4)^\perp$ es una irrep de S_4 de dimensión 3

$$\chi_U = \chi_W - \chi_{triv} = (3, 1, -1, 0, -1)$$

$$[\langle \chi_U, \chi_U \rangle] = \frac{1}{24}\left(3^2 + 6\cdot 1^2 + 3\cdot(-1)^2 + 8\cdot 0^2 + 6\cdot(-1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{24}(9 + 6 + 3 + 6) = \frac{24}{24} = 1$$

luego U es irreducible.

$$|S_4| = 24 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + \dim(V_i)^2 + \dim(V_i^2) + \cancel{\dim(V_i^k)}$$

$$\underline{13} = \underbrace{\dim(V_i)^2}_{2^2} + \underset{\substack{V_i \\ 2}}{\dim(V_j)^2} + \dim(V_i)^2 + \dots +$$

$$2^2 + 2^2 + 2^2 + \dots \times$$

$$2^2 + 3^2$$

Así que faltan 2, una de dim 2 y otra de dim 3.

$$\chi_{\mathbb{C}S_4} = \chi_{triv} + \chi_{sgn} + 3\chi_u + 3\chi_{sgn\otimes u} + 2\chi_V$$

$\chi_{\mathbb{C}S_4}$	24	0	0	0	0
	1	1	1	1	1
	1	-1	1	1	-1
	9	3	-3	0	3
	9	-3	-3	0	-3
$2\chi_V$	4	0	4	-2	0
χ_V	2	0	2	-1	0

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{4 + 2^2 \cdot 3 + 1 \cdot 8}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

De dónde viene V?

$\chi_V((12)(34)) = 2$ y $\dim(V) = \chi_V(e) = 2$

así que $[(12)(34)]$ actúa trivialmente. Nota que $[(12)(34)] \cup \{e\}$ es un subgrupo de S_4

$$\left|S_4/H\right| = 4!/4 = 3!$$

no abeliano

$\cong S_3$

$$\begin{tikzcd} S_4 \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "q"] & GL(V) \\ S_3 \cong (S_4/H) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

V es la rep. irred 2-diml de S_3.

$\boxed{\text{Ejercicio:}}$ Demuestra que, para $j \geq 5$ no existen homs sobreyectivos $S_j \longrightarrow S_d$, $d < j$, $d > 2$.

* Ejercicio: Demuestra que si V es irrep de G y $\dim(V) \geq 2$ entonces $\exists\, g \in G : \chi_V(g) = 0$.
[Burnside]

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = a_1^2 + \dots + a_k^2$$

$$\sum_C |C| = |G|$$

$$\boxed{\frac{1}{|G|} \sum_C |C| \chi_V(g)^2 = 1}$$

al menos una de ellas debe ser cero! (~~porque~~ hay alguno que tenía ≥ 4)