G — grupo finito

V — rep de G (de $\dim < \infty$, $/\mathbb{C}$)

Teorema: V es isomorfa a una suma directa de representaciones irreducibles de G

Lema: Si $W \subseteq V$ es un subespacio invariante entonces:

(1) Existe un producto hermitiano G-invariante $\langle , \rangle_G$

$$\left(\forall v,w \in V \ \forall g \in G \quad \langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle_G = \langle v, w \rangle_G\right)$$

tal que $W^{\perp} := \{ v \in V : \langle v, w \rangle_G = 0 \ \forall w \in W \}$ es un subespacio invariante

(2) $V \cong W \oplus W^{\perp}$ como reps de G $\quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

Af: Lema $\Rightarrow$ Teo.

Dem: Ind en $\dim(V)$.

$\dim(V) = 1 \Rightarrow V$ es irreducible ✓

$\dim(V) = d+1$, sabiendo que Teo es cierto para toda rep de $\dim \leq d$.

$$\begin{tikzcd} & V \text{ irreducible ✓} \\ V \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & V \text{ no irreducible} \end{tikzcd}$$

?? $\exists \quad \{0\} \subsetneq W \subsetneq V$

subespacio invariante

Lema $\Rightarrow V = W \oplus W^{\perp}$

$\max\left(\dim(W), \dim(W^{\perp})\right) < \dim(V)$

luego podemos aplicar hip de ind a W y $W^{\perp}$

$V =$ "suma de irreducibles"

$\underbrace{G \curvearrowright X} \rightsquigarrow \mathbb{C}[X]$

$\underbrace{\langle x, y\rangle}_{G} = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3$ es G-invte

Ejemplo: $S_3 \curvearrowright \langle e_1, e_2, e_3\rangle = V$

$W = \langle 1,1,1\rangle$ es invte (de hecho es la rep trivial)

$\rightarrow$ Como $\langle\,,\rangle_G$ es G-invte

$W^\perp = \{(x,y,z) : \langle (x,y,z), (1,1,1)\rangle = 0\}$ es invte

$x+y+z=0$

$$W^\perp = \langle \underset{g_1}{(1,0,-1)}, \underset{g_2}{(0,1,-1)}\rangle$$

$$\rho((1,2,3))(g_1) = (-1,1,0) = -g_1 + g_2$$

$$\rho((1,2,3))(g_2) = (-1,0,1) = -g_1$$

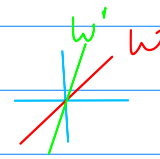
$$\rho_{W^\perp}((1,2,3)) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$W^\perp = \langle g_1, g_2\rangle$

* * Ejercicio: $W^\perp \otimes W^\perp \overset{?}{=}$ ← suma de irreducibles
*

(Una posibilidad usar ... $W^\perp \otimes W^\perp = \mathrm{Sym}^2(W^\perp) \oplus \Lambda^2(W^\perp)$)

Otra posible prueba para el Lema



Lema: Sea $W \subseteq V$ un subespacio invte. Entonces existe un sumando directo $W' \subseteq V$ también invariante. $(V = W \oplus W')$

Dem: Sea $\tilde{W}$ un complemento cualquiera. Como espacios vectoriales:

$V = \tilde{W} \oplus W$, $\pi_0 : V \longrightarrow W$ proyección

$\pi_0(w) = w \quad \forall w \in W$ $\quad \pi_0 \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$\pi_0(\tilde{w}) = 0 \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{W}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\neq"] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)(\pi_0)"] & W \end{tikzcd}$$

$$\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)(\pi_0) = \rho_W(g)\left[\pi_0\left(\rho_V(g)^{-1}(\cdot)\right)\right]$$

$$\rho_W(g)\left(\Pi_0\left(\rho_V(g)^{-1}(\cdot)\right)\right)$$

$$\Pi_{(\cdot)} := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \underbrace{\rho_{Hom(V,W)}(g)\,(\Pi_0)\,(\cdot)}$$

por haber promediado

Obs: $\rho_{Hom(V,W)}(h)(\Pi) = \Pi$

Notación: morfismo de reps

Por ejercicio $Hom(V,W)^G = Hom_G(V,W)$

$\Pi : V \underset{i}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} W$ es morfismo de reps ✓

$\boxed{\Pi(i(w)) = w}$ (porque es cierto para Π_0)

(✱) ... sigue abajo, pues usa el siguiente Lema 2:

Lema 2: (Propiedades de morfismos de reps)

Sean W_1 y W_2 reps de G y sea

$f : W_1 \longrightarrow W_2$ un morfismo de reps (i.e. $f \in Hom_G(W_1, W_2)$)

entonces:

(1) $Ker(f) \subseteq W_1$ es un subesp. invariante

(2) $im(f) \subseteq W_2$ es un subesp. invariante.

Dem: Sea $\vec{u} \in Ker(f)$, $g \in G$.

Aux: $\rho_{W_1}(g)(\vec{u}) \in Ker(f)$ ✓

Dem: $f(\rho_{W_1}(g)\vec{u}) = \rho_{W_2}(g)(f(\vec{u})) = \rho_{W_2}(g)(\vec{0}) = \vec{0}$

Sea $\vec{w} \in im(f)$, $h \in G$

Aux: $\rho_{W_2}(h)(\vec{w}) \in im(f)$

Dem: Sea $\vec{a}$: $f(\vec{a}) = \vec{w}$

$$\rho_{W_2}(h)(f(\vec{a})) = \rho_{W_2}(h)(\vec{w})$$
$$\| $$
$$f(\rho_{W_1}(h)(\vec{a})) \Rightarrow \rho_{W_2}(h)(\vec{w}) \in im(f) \checkmark$$

(✱) Retomando ...

$V \underset{i}{\overset{\Pi}{\rightleftarrows}} W$ $\quad$ Π, i morfismos de reps!

$\boxed{\Pi \circ i = id}$

Se sigue, del Lema 2 que $Ker(\pi) \subseteq V$ es un subespacio invariante. Mostramos que como espacios vect

$$V = Ker(\pi) \oplus Im(i)$$

(mostrando el isomorfismo como reps automáticamente)

W', W

$$\vec{v} = \underbrace{i(\pi(\vec{v}))}_{\in im(i)} + \underbrace{(\vec{v} - i(\pi(v)))}_{\in ker(\pi)}$$

$$V = Im(i) \oplus Ker(\pi)$$

$$\pi(\vec{v} - i(\pi(v))) = \pi(v) - \pi(i(\pi(v)))$$
$$= \pi(v) - \pi(v) = 0 \checkmark$$

$ker(\pi) \cap im(i) = \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = i(\beta) \\ 0 = \pi(\alpha) = \pi(i(\beta)) = id(\beta) = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \vec{0}$$

Ejercicio: Sea V una representación, $W, W' \subseteq V$ subespacios invariantes. Si como espacio vectorial $V = W \oplus W'$ entonces también como representaciones de G.

G - grupo finito

V rep de G ($\dim(V) < \infty$, $V/\mathbb{C}$)

Teorema: Para toda rep V de G hay una descomposición

$$V \overset{\varphi}{\cong} V_1^{\oplus a_1} \oplus V_2^{\oplus a_2} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

donde los V_i son representaciones irreducibles distintas (i.e. no isomorfas). Los k-sumandos son subespacios únicos, $V \supseteq (\varphi(V_i^{\oplus a_i}))$ los tipos de isomorfismo de las representaciones V_i y las multiplicidades a_i también lo son.