Corrección Ej:

Sean U, V reps de G, demostrar que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\Lambda^k(U \oplus V) \cong \bigoplus_{\substack{(a,b):\, a+b=k \\ a,b \in \mathbb{N}}} (\Lambda^a U) \otimes (\Lambda^b V)$$

Hoy: Hasta qué punto hay unicidad de la descomposición de una rep en suma de irreducibles. G – grupo finito, V – rep de G / $\mathbb{C}$, $\dim(V) < \infty$

Teorema: V es isomorfa a una suma directa de representaciones irreducibles de G. Más precisamente

$$V \underset{\cong}{\xleftarrow{\varphi}} V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

adentro la suma NO está determinada de manera única

$\varphi(V_i)$ no está det de manera única

donde las V_i son rep irreducibles no isomorfas para $i \neq j$

Más aún: (1) Las V_i que aparecen en la rep son únicas

(2) Las multiplicidades a_i son únicas

(3) Los subespacios $\varphi(V_i^{\oplus a_i})$ son únicos (se llaman componentes isotípicas de V)

Obs: ¿Qué no es único?

Ejemplo: $V = \langle e_1, e_2 \rangle$ $\rho : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to GL(V)$

$e \mapsto Id$

$\sigma \mapsto -Id$

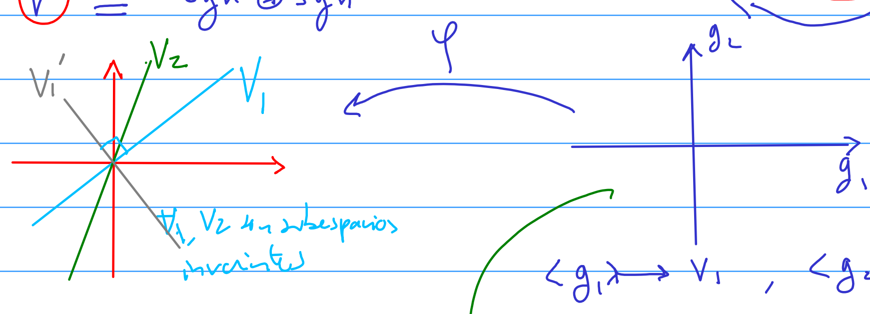
$W = \langle g_1 \rangle$, $\rho : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to GL(W)$ $sgn := (W, \rho_W)$

$e \mapsto ~~Id~~\ 1$

$\sigma \mapsto -~~Id~~\ 1$

$$V \underset{\cong}{\xleftarrow{\varphi}} sgn \oplus sgn$$

$V = sgn^{\oplus 2}$



$sgn \oplus sgn$
$\langle g_1 \rangle$ $\langle g_2 \rangle$

$$\sigma \mapsto \begin{array}{c|cc} & g_1 & g_2 \\ \hline g_1 & -1 & 0 \\ g_2 & 0 & -1 \end{array}$$

$\langle g_1 \rangle \to V_1$, $\langle g_2 \rangle \to V_2$

$V \cong V_1' \oplus V_2 \leftarrow \varphi$

Ejercicio (a) Demuestre que si V es una representación irreducible de G y $\langle , \rangle_G$ y $\langle , \rangle_G'$ son productos hermitianos G-invariantes entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que
$$\langle , \rangle_G' = \lambda \langle , \rangle_G$$

(b) Describa los productos hermitianos G-invariantes en una rep. cualquiera.

(Hint: Piense que son productos internos primero...)

(de Schur)

Lema: Sean W_1, W_2 representaciones irreducibles de G y sea $\varphi : W_1 \longrightarrow W_2$ un morfismo de reps. (i.e. $\varphi \in Hom_G(W_1, W_2)$) entonces ó $\varphi \equiv 0$ ó φ es un isomorfismo.
Más aún si $W_1 = W_2$ entonces $\varphi = \lambda\, Id$.

Obs: El Lema describe $Hom_G(W_1, W_2)$ para W_1, W_2 irred.

$$Hom_G(W_1, W_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } W_1 \not\cong W_2 \\ \varphi \circ \lambda Id,\ \lambda \in \mathbb{C}, & \text{si } W_1 \cong W_2 \end{cases}$$

$\lambda \varphi$
$\lambda \in \mathbb{C}$
φ iso cualquiera

$W_1 \overset{\varphi_1}{\underset{\varphi_2}{\rightrightarrows}} W_2$ $\qquad \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \lambda\, Id$

$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (\lambda\, Id)$

Dem: Sea W_1, W_2 irreps. y $\varphi \in Hom_G(W_1, W_2)$ $\quad W_1 \neq \{\vec{0}\}$

$$W_1 \xrightarrow{\varphi} W_2$$

~~$[(\{0\}) \quad G(\{0\})]$~~ ? $\{Id\}$

Como φ es morfismo

(1) $Ker(\varphi) \subseteq W_1$ es invariante $\Rightarrow Ker(\varphi) \in \{\{\vec{0}\}, W_1\}$

Si $Ker(\varphi) = \{\vec{0}\} \Rightarrow \varphi$ es 1-1

Si $Ker(\varphi) = W_1 \Rightarrow \varphi \equiv 0$ ✓

(2) $im(\varphi) \subseteq W_2$ es invariante $\Rightarrow im(\varphi) \in \{\{\vec{0}\}, W_2\}$

Si φ es 1-1 y $W_1 \neq \{\vec{0}\}$ entonces $im(\varphi) \neq \{\vec{0}\}$
$im(\varphi) = W_2$ luego φ es isomorfismo ✓

Si $W_1 = W_2$ $\quad \varphi : W_1 \longrightarrow W_1$ como estamos sobre $\mathbb{C}$ $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$, $\vec{v} \in W_1 \neq 0$ con $\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, $\quad \varphi - \lambda I \in \mathrm{Hom}_\varphi(W_1, W_1)$

$\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda I) \supseteq \{\vec{v}\}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda I)$ al ser no trivial e invariante satisface $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda I) = W_1$ porque W_1 es irred.

$\Rightarrow$ $\varphi = \lambda\, \mathrm{Id}$ ✓

Dem del Teo:

Existencia la tenemos. ✓ Suponga que tenemos dos descomposiciones en irreducibles

$$\begin{tikzcd} V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} \arrow[r, "\varphi"] & W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_j^{\oplus b_j} \arrow[d, "\pi_t"] \\ V_i \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\pi_t \circ \varphi \circ i"] & W_t \end{tikzcd}$$

Las i y las π son morfismos de reps!

(1) Fije V_i y una inclusión <u>A ver:</u> $\exists\, t : W_t \cong V_i$

Sea $\vec{\beta} \neq 0$, $\vec{\beta} \in V_i$ $\qquad \underset{\neq \vec{0}}{\varphi(i(\vec{\beta}))} \in W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_j^{\oplus b_j}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi(i(\vec{\beta})) = (\ , \ldots , \ )$

tiene que tener alguna componente no nula así que existe t : $\pi_t(\varphi(i(\vec{\beta}))) \neq \vec{0} \in W_t$

$\Rightarrow$ $\pi_t \circ \varphi \circ i$ es isomorfismo luego

$V_i \cong W_t$

Como el argumento es reversible los tipos de isomorfismo de las inductivas que vemos son independientes de la descomposición!