Algoritmos de la Teoría de Invariantes

Ejercicios Propuestos, semanas 1 y 2

---

1. Usar el algoritmo que da la demostración del teorema fundamental de las funciones simétricas para escribir el polinomio $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ como polinomio en las funciones simétricas elementales.

2. Mostrar que el determinante de la matriz de Vandermonde es la raíz cuadrada del valor absoluto del discriminante. Es decir, si V es la matriz de Vandermonde con las raíces del polinomio f,
$$\Delta(f) = \det(V)^2.$$

3. Demostrar las identidades de Newton que expresan los *power sums* en términos de polinomios simétricos elementales. [Draisma, Lecture 2, Ej. 2.3.2]

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Demostrar:

   (1) Si $u^tAu > 0$ para todo $u \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ subespacio vectorial, entonces A tiene los mismos o más valores propios mayores que 0 que la dimensión de U.
   Si $u^tAu < 0$ para todo $u \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ subespacio vectorial, entonces A tiene los mismos o más valores propios menores que 0 que la dimensión de U.

   (2) $\dim(\ker(A)) = \#\{\text{Valores propios } 0\}$

5. Rehacer la demostración del Teorema de Sylvester en el caso en el que se tengan raíces repetidas.

6. Sea $A \subseteq R$ con R un anillo. Si (A) se define como el ideal más pequeño que contiene a A, probar que:
$$(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i\, r_i \text{ en donde } n \in \mathbb{N},\;\; a_i \in A,\;\; r_i \in R \right\}$$

(*) 7. Demuestre que toda anticadena de ideales de monomios (por inclusión) es finita.