Algoritmos y la Teoría de Invariantes

Ejercicios Propuestos, semanas 3 y 4

---

1. Hacer el tutorial básico de **MACAULAY 2**

2. Dada la siguiente definición

   Definición 1. *Un ideal $I \subset R$ es homogéneo si $\forall p \in R$ $(p \in I \Leftrightarrow p_j \in I, \forall j)$ donde $p = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_j$ es la descomposición que viene de la graduación.*

   Probar que la definición anterior es equivalente a: *Existe un conjunto de elementos homogéneo que genera a I*

3. Encuentre una demostración combinatoria de que

$$HF(k[x_1, \cdots x_n], m) = \binom{m+n-1}{m}$$

4. Trabajando con la serie de Hilbert:

   a) Demuestre que $HS(k[x_1, \cdots x_n]) = \frac{1}{(1-t)^n}$

   b) Use $[4a]$ para calcular $HF(k[x_1, \cdots x_n], m)$

   (*) (Pensar) Calcule $HS(k[x_1, \cdots x_n])$ con $deg(x_i) = a_i, a_i > 0$. ¿Qué comportamiento tiene $HF(k[x_1, \cdots x_n], m)$?

5. Generalizando el ejercicio en clase

   a) Demuestre que una presentación para $k[s^m, s^{m-1}t, \cdots t^m]$ está dada por

$$k[x_0, \cdots, x_m]/I$$

   con

$$I = \big(x_i x_j - x_r x_s : i + j = r + s, \quad 0 \leq i, j, r, s \leq m\big)$$

   b) Encuentre un orden con respecto al cual los generadores sean base de Gröbner.

6. Demuestre que si $M = (m_1, \cdots, m_k)$ con m_i monomio y n es otro monomio, entonces

$$(M : n) = \left(\frac{m_1}{\gcd(m_1, n)}, \cdots, \frac{m_k}{\gcd(m_k, n)}\right)$$

7. Sea I un ideal en $k[\vec{x}, \vec{y}]$. Suponga que $I = J_1 + J_2$ con J_1 que depende sólo de $\vec{x}$ y J_2 que depende sólo de $\vec{y}$. Demostrar que

$$k[\vec{x}, \vec{y}]/I \simeq k[\vec{x}]/J_1 \otimes k[\vec{y}]/J_2$$

8. Sea $I \subseteq k[x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots, y_n]$ el ideal definido por

$$I = (y_i - \sigma_i(x_1, \cdots, x_n) : 1 \leq i \leq n)$$

y $q_1, \ldots, q_n$ polinomios en $k[x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots, y_n]$ asi

$$q_m = \sum_{j=1}^{m} h_{m-j}(x_m, \ldots, x_n) y_j + h_m(x_m, \ldots, x_n)$$

con $h_i(x_m, \ldots, x_n)$ igual a la suma de todos los monomios de grado i en las variables $x_m, \ldots, x_n$. Entonces, pruebe que $q_i \in I$, demostrando que

$$\sum_{j=1}^{m} h_{m-j}(x_m, \ldots, x_n) \sigma_j(x_1, \cdots, x_n) + h_m(x_m, \ldots, x_n) = 0.$$

9. *a*) Demostrar el criterio de Buchberger (pg. 86 [1])
   b) Si $in_<(f)$ e $in_<(g)$ son primos relativos, entonces $res(S(f,g), G) = 0$

10. *a*) Si $in_<(I)$ es radical, entonces I es radical
    b) Propiedades de *grevlex*
       1) Si $k[x_1, \cdots, x_n]$ tiene orden *grevlex* con $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ e $in_<(f) \in (x_k, \cdots, x_n)$ entonces $f \in (x_k, \cdots, x_n)$
       2) Use [10*b*1] para encontrar una base de Gtöbner para $\big(I : (x_n)\big)$ a partir de una base de Gröbner.
       3) Use [10*b*2] para encontrar cómo calcular $I : (g_1, \cdots g_n)$.

11. *a*) Como calcular $I \cap J$ a partir de sus generadores
    b) Dada la siguiente cadena

$$I \subset \big(I : (g)\big) \subset \big(I : (g^2)\big) \subset \cdots$$

defina

$$\Big(I : (g^\infty)\Big) = \bigcup_{k \geq 0} \big(I : (g^k)\big)$$

¿Cómo calcular $I : (g^\infty)$? *Sugerencia:* $\phi : R \to R[g^{-1}]$ y $\Big(I : (g^\infty)\Big) = \phi^{-1}\Big((\phi(I))\Big)$

Referencias

[1] David Cox, John Little, and Donal O'shea. *Ideals, varieties, and algorithms*, volume 3. Springer, 1992.