Algoritmos en Teoría de Invariantes

Ejercicios Semanas 5 y 6

1. Demuestre que un ideal $I = (1)$ si y sólo si su base de Gröbner reducida es $\{1\}$.

2. Sea k un cuerpo, $\overline{k}$ la clausura algebráica de k e $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal radical con $\left|V_{\overline{k}}(I)\right| = m < \infty$. Demuestre que $\dim_k (k[x_1, \ldots, x_n]/I) = m$ de la siguiente forma

   (a) Asuma que $k = \overline{k}$ y demuéstrelo.

   (b) Si V es un espacio vectorial sobre k, muestre que
   $$\dim_k (V) = \dim_{\overline{k}} \left(V \otimes_k \overline{k}\right).$$

   (c) Demuestre que
   $$(k[x_1, \ldots, x_n]/I) \otimes_k \overline{k} \cong \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]/J,$$
   donde J es el ideal definido por los generadores de I en $\overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$.

   (d) Si I es un ideal radical en $k[x_1, \ldots, x_n]$, J es un ideal radical en $\overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$.

3. Para R un anillo noetheriano e I un ideal de R se tiene que
   $$I = [I + (f)] \cap (I : f^{\infty}).$$

4. Demuestre que la intersección arbitraria de ideales monomiales es un ideal monomial.