Ejercicios semanas 7 y 8

21 de marzo de 2017

1. Si
$$\psi : V \to W$$
es un morfismo de representaciones, entonces
   - $\ker(\psi) \subseteq V$ es G-invariante.
   - $\mathrm{im}(\psi) \subseteq W$ es G-invariante.
2. Sea $W = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ y considere a W como una S_3- representacion, donde la accion de S_3 son las premutaciones de los elementos e_1, e_2 y e_3. Descomponga W en subespacios irreducibles.
3. Hacer los siguientes ejercicios de las notas *"Invariant Theory with Applications"* de Jan Draisma y Dion Gijswijt:
   - 4.2.1
   - 4.2.4
   - 4.2.3
4. Hacer el siguiente ejercicio de las notas *"Invariant Theory with Applications"* de Jan Draisma y Dion Gijswijt:
   - 3.1.2
5. Sean V, U un par de G-representaciones, $v_1, \ldots, v_n$ una base para V y el operador lineal
$$\begin{aligned} <,>: U^* \otimes V &\to \hom(U, V) \\ \phi \otimes v &\mapsto (u \mapsto \phi(u)v). \end{aligned}$$
. Demostrar lo siguiente:
   a) Usando la base anterior pruebe que $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^t$.
   b) $< \rho^*(g)(\phi), \rho(g)v >=< \phi, v >$.
   c) Sean A, B dos G-representaciones. Demuestre que $\hom(A, B)$ tambien es una representacion mediante
$$\overline{\rho}(g)(\phi) := \rho_B(g^{-1}) \circ \phi \circ \rho_A(g)$$
   d) Demuestre que $\overline{\rho}(g)$ es isomorfa como representacion a $A^* \otimes B$.
   e) Demuestre que si $B = k$(i.e. $\dim(B) = 1$) entonces $\hom(A, B) \cong A^*$ como representaciones.
6. Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función. Si
$$\psi_V := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)$$
es un morfismo de representaciones para todo V, entonces f es una funcion de clase.

7. Sea V una G-representacion irreducible, y defina

$$\begin{aligned} h_{i,j} : G &\to \mathbb{C} \\ g &\mapsto [\rho(g)]_{ij}. \end{aligned}$$

Demuestre que

$$\langle h_{ij} : 1 \leq i, j \leq \dim(V),\ V \in \mathrm{rep}(G) \rangle = \mathrm{Fun}(G, \mathbb{C}).$$

8. Construya geométricamente las S_4-representaciones V y W que estan dadas por los caracteres

	e	(1 2)	(1 2 3)	(1 2)(2 3)	(1 2 3 4)
V	3	-1	0	-1	1
W	3	1	0	-1	1

9. Calcule la tabla de caracteres de S_5.