Problemas Semanas 9-11

Teoría de invariantes

(1) Si (V, ρ) es una representación fiel, demuestre que toda representación irreducible vive en $V^{\otimes k}$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$.

(2) (a) Demuestre que $\mathbb{C}[x, xy, xy^2, \ldots]$ no es una $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada.

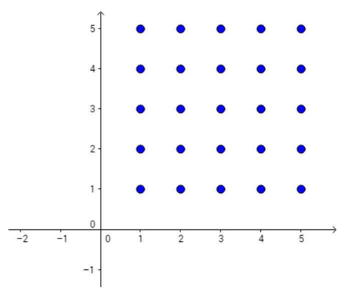

Figure 1: retículo $\mathbb{C}[x, xy, xy^2, \ldots]$

(b) Toda subálgebra de $\mathbb{C}[x]$ es finitmente generada.?

(3) Si $e_1, \ldots, e_n$ son base para el espacio vectorial V, demuestre que $e_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot e_n^{a_n}$ con $a_1 + \ldots + a_n = m$ son base para $\mathrm{Sym}^m(V)$.

(4) **Obligatorio 1!**

(a) Sea χ un caracter irreducible de G y defina $R^\chi \subset R$ la componente isotípica de χ. Demuestre que R^χ es un R^G módulo graduado.

(b) Encuentre una generalización del teorema de Molien para calcular $HS(R^\chi)$.

(c) Sea $S_3 \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ por permutación sobre las x_i's. Calcular: $HS(R^G)$, $HS(R^{\chi_{\mathrm{sgn}}})$ y $HS(R^{\chi_U})$, donde U es la representación de dimensión dos.

(5) Una pareja $(\bigwedge^k W^*, f)$ donde $\bigwedge^k W^*$ es un espacio vectorial y $f : W^* \times \ldots \times W^* \to \bigwedge W^*$ es k- lineal alternante que satisface:

$$\begin{tikzcd}
W^* \times \ldots \times W^* \arrow[r, "T", "k\text{-lin. alt.}"'] \arrow[d, "f"'] & B \\
\bigwedge W^* \arrow[ur, "\exists! L \text{ lineal}"'] &
\end{tikzcd}$$

(a) Muestre que la pareja $(\bigwedge^k W^*, f)$ es única salvo isomorfismo.

(b) Constuya $\bigwedge^k W^*$ como cociente de $W^* \otimes \ldots \otimes W^*$.

(c) Si $\ell_1, \ldots, \ell_n$ son una base para W^*, mueste que
$$\{\ell_{i_1} \wedge \ldots \wedge \ell_{i_k} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$$
son base para $\bigwedge^k W^*$.

(6) Si $T : A \to B$ es una transformación lineal defina $\bigwedge^k T : \bigwedge^k A \to \bigwedge^k B$ como sigue (note que es el único operaor lineal):
$$\bigwedge^k T(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = T(v_1) \wedge \ldots \wedge T(v_k).$$

(a) Demuestre que la matriz que representa a $\bigwedge^k T$ en alguna base esta dada por lo menores $k \times k$ de la matriz que representa a T.

(b) Demuestre que:
- $\bigwedge^k (T_1 \circ T_2) = \bigwedge^k T_1 \cdot \bigwedge^k T_2$
- $\bigwedge^k (\mathrm{Id}_{W^*}) = \mathrm{Id}_{\bigwedge^k W^*}$.

(c) Si (W, ρ) es una representación entonces $(\bigwedge^k W, \bigwedge^k(\rho(\cdot))$ es una representación.

(7) **Obligatorio 2!**

Definición 1. *Definimos el caracter de la representación de $\bigwedge^\blacklozenge W^*$ como sigue ($n = \dim W$):*
$$\chi_{\bigwedge^\blacklozenge W^*}(g) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{\bigwedge^k W^*}(g) t^k.$$

Demuestre que:

(a) $\chi_{\bigwedge^\blacklozenge W^*} = \det(\mathrm{Id} + t\rho^*(g))$.

(b) Generalice el teorema de Molien para el álgebra exterior.

(c) Calcule $HS(\bigwedge^\blacklozenge W^*)$.

(d) Haga los calculos para el siguiete caso: $S_3 \curvearrowright \{e_1, e_2, e_3\}$, con $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = W$, $W^* = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ y $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

(8)

Definición 2. *Una función regular de $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^m$ es una finción con componentes polinomiales, es decir:*
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longrightarrow (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

(a) Demuestre que
$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m] &\longrightarrow \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \\ h &\longrightarrow h \circ \varphi \end{aligned}$$
es un homomorfismo de álgebras y que $\ker(\varphi^*)$ son precisamente los polinomios $q(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$ que se desvanecen en $\mathrm{Im}(\varphi^*)$.

(b) Defina $J = \langle y_i - F_i(x_1, \ldots, x_n) : 1 \leq i \leq m \rangle$ en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ y verifique que $J \cap \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m] = \ker(\varphi^*)$.

(c) Dé un algoritmo usando bases de Gröbner para calcular $\ker(\varphi^*)$.

(d) Demuestre que la subálgebra de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ generada por los F_i's es isomorfa a $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]/\ker(\varphi^*)$.

(e) Encuentre un ejemplo de una función regular $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^3$, tal que $\mathrm{Im}(\varphi) \subsetneq V(\ker(\varphi^*))$.