GRÖBNER BASICS AND CONVEX POLYHEDRA.

(1) (**El abanico de Gröbner**) Suponga que $\vec{d} = (d_1, \dots, d_n) > \vec{0}$ y que $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal d-homogéneo con respecto a la graduación dada por $\deg(x_i) = d_i$.

Definition 0.1. Si $w \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathrm{in}_w(I) = (\{\mathrm{in}_w(g) : g \in I\})$. Si $\prec$ es un orden monomial definimos $\mathrm{in}_\prec(I) = (\{\mathrm{in}_\prec(g) : g \in I\})$

Definition 0.2. Defina la siguente relación de equivalencia en $\mathbb{R}^n$: $w \sim w'$ si y solo si $\mathrm{in}_w(I) = \mathrm{in}_{w'}(I)$ y para $w \in \mathbb{R}^n$ sea $C[w]$ la clase de equivalencia que contiene a w.

Sea $w \in \mathbb{R}^n$. Demuestre las siguientes afirmaciones

(a) La clase de equivalencia $C[w]$ se puede calcular mediante los siguientes pasos:
   (i) Escoja un orden monomial $\prec$. Usándolo defina un orden de los monomios de $k[x_1, \dots, x_n]$ mediante $x^a \prec_w x^b$ si y sólo si $w^t a < w^t b$ ó $w^t a = w^t b$ y $a \prec b$. (Demuestre que $\prec_w$ es un orden monomial).
   (ii) Sea G la base de Gröbner reducida de I con respecto a $\prec_w$. (Demuestre que, para cualquier orden monomial $\prec$ la base de Gröbner reducida con respecto al orden $\prec$ es única).
   (iii) Verifique la igualdad
$$C[w] = \{w' \in \mathbb{R}^n : \mathrm{in}_{w'}(g) = \mathrm{in}_w(g), g \in G\}$$
(b) Demuestre que $C[w]$ es un cono polihedral relativamente abierto (i.e. abierto en su span afín).
(c) Demuestre que $K = \overline{C[w]}$ es un cono polihedral cerrado y que las caras de K son precisamente los conjuntos $\left\{\overline{C[w']} : w' \in C[w]\right\}$
(d) Demuestre que el conjunto $\left\{\overline{C[w]} : w \in \mathbb{R}^n\right\}$ es una estructura de abanico (fan) en $\mathbb{R}^n$ con un número finito de celdas.
(e) Proponga un algoritmo para calcular todas las celdas del abanico de Gröbner para un ideal I dado.
(f) Dibuje (a mano) el Gröbner fan del ideal generado por dos cuádricas genéricas en tres variables (del Ejemplo 3.8 pag. 23 del libro de Sturmfels). Note que el ideal es homogéneo asi que todos los conos tienen al espacio vectorial generado por $(1, 1, 1)$ como espacio de linealidad luego, en realidad, el dibujo puede hacerse en $\mathbb{R}^2$.

(2) (**Bases de Graver**) Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_s\} \subseteq M \cong \mathbb{Z}^m$ y sea $\Phi : T_N \to \mathbb{C}^s$ el morfismo dado por
$$\Phi(t_1, \dots, t_m) = (t^{a_1}, \dots, t^{a_s})$$
con pull-back $\Phi^* : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \to \mathbb{C}[t_1^{\pm}, \dots, t_m^{\pm}]$.

(a) Defina una M-graduación de $R := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ mediante $\deg(x_i) = a_i$ (asi que $\deg(x^u) = Au$ dónde $A : \mathbb{Z}^s \to \mathbb{Z}^m$ es la matriz cuyas columnas son los vectores a_i) y demuestre que Φ^* es un morfismo de anillos graduados de grado cero y defina $I_{\mathcal{A}} := \mathrm{Ker}(\Phi^*)$
(b) Demuestre que $I_{\mathcal{A}} = (\{x^u - x^v : A(u - v) = 0\})$.

(c) Cada vector $v \in \mathbb{Z}^s$ admite una única expresión $v := v^+ - v^-$ dónde v^+ y v^- son vectores en $\mathbb{N}^s$ con soportes disyuntos. Pruebe que

$$I_{\mathcal{A}} := \left(\left\{x^{u^+} - x^{u^-} : Au = 0\right\}\right)$$

(d)

Definition 0.3. Un binomio $x^u - x^v \in I_{\mathcal{A}}$ se dice primitivo si $x^\alpha - x^\beta \in I_{\mathcal{A}}$, $x^\alpha | x^u$ y $x^\beta | x^v$ implica que $x^\alpha = x^u$ y $x^\beta = x^v$.

Demuestre que si $\prec$ es un orden monomial y G es una $\prec$-base de Gröbner reducida para $I_{\mathcal{A}}$ entonces todos los elementos de g son binomios primitivos en $I_{\mathcal{A}}$. Concluya que la coleccion de binomios primitivos de $I_{\mathcal{A}}$ es una base de gröbner universal para $I_{\mathcal{A}}$ (esa colección se llama base de Graver de $I_{\mathcal{A}}$).

(e) De un algoritmo para calcular todos los binomios primitivos de $I_{\mathcal{A}}$ y demuestre que su algoritmo funciona (sugerencia: Una posibilidad es usar levantamientos de Lawrence).

(3) (**) Hacer los siguientes ejercicios del libro "Gröbner bases and convex polytopes". Vale ayudarse con un computador.

(a) Ejercicio 1, pag. 37.
(b) Ejercicio 1,3,4 pag. 44.
(c) Ejercicio 1 pag. 53.

Recomiendo el excelente programa Macaulay2 de Grayson y Stillman (que todos deberian aprender a usar).

Para bajar Macaulay2 ir a `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/Downloads/`

Para Macaulay2 online (sin instalarlo), `http://habanero.math.cornell.edu:3690/`

Un tutorial introductorio, hecho por Eisenbud y Stillman `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/doc/Macaulay2-1.7/share/doc/Macaulay2/BeginningMacaulay2/html/`