# Álgebra Tensorial: Ejercicios de Clase

---

## Semana 1.

**Ejercicio 1.1.** Demuestre que existen tensores en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ que no son de rango 1, y caracterice los tensores totalmente descomponibles en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$ (es decir, encuentre las ecuaciones que satisfacen los coeficientes de los vectores de rango 1).

**Ejercicio 1.2.** Teniendo en cuenta que para $X, Y$ y $Z$ variables aleatorias discretas, con $X \in \{1, \dots a\}$, $Y \in \{1, \dots b\}$ y $Z \in \{1, \dots c\}$, se puede construir un tensor de formato $a \times b \times c$, definido en una base, por los coeficientes

$$T_{ijk} = \mathbb{P}\{X = i, Y = j, Z = k\}$$

para $1 \leq i \leq a$, $1 \leq j \leq b$ y $1 \leq k \leq c$. ¿Es verdad que el tensor $T_{ijk}$ es de rango 1 si y sólo si las variables son independientes?

**Ejercicio 1.3.** Sean $U$ y $V$ espacios vectoriales complejos de dimensión finita. Caracterice los tensores totalmente descomponibles en $U^* \otimes V$ (es decir, encuentre las ecuaciones que satisfacen los vectores de rango 1).

**Ejercicio 1.4.** Demuestre que para dos espacios vectoriales complejos $U$ y $V$, el isomorfismo canónico

$$\mathrm{Hom}(U, V) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U^* \otimes V$$

manda las transformaciones lineales con rango $\leq k$ (i.e los $T \in \mathrm{Hom}(U, V)$ con $\dim(\mathrm{im}(T)) \leq k$) a los tensores que son suma $k$ o menos tensores descomponibles.

**Ejercicio 1.5.** Demuestre que para todo entero $k$, el conjunto $\{T \in U^* \otimes V : R(T) \leq k\}$ es un conjunto cerrado con la norma euclidea.

**Ejercicio 1.6.** Demuestre que para $U, V$ y $W$ espacios vectoriales complejos de dimensión finita, existen los siguientes isomorfismos canónicos:

(a) $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$

(b) $U \otimes v \cong V \otimes U$

(c) $(U \otimes V)^* \cong U^* \otimes V^* \otimes W$

---

## Semana 2.

**Ejercicio 2.1.** Sean $V$ y $U$ espacios vectoriales de dimensión finita. Demuestre que el isomorfismo canónico $U^* \otimes V \overset{\varphi}{\cong} \mathrm{Hom}(U, V)$ da una correspondencia biunívoca entre el conjunto de tensores con rango menor a $k$, $\{T \in U^* \otimes V : R(T) \leq k\} \subseteq U^* \otimes V$, con el conjunto de transformaciones lineales $T \in \mathrm{Hom}(U, v)$ tales que el determinante de todos sus menores de tamaño $(k+1) \times (k+1)$ es igual a 0. Es decir:

$$\{\, T \in V^* \otimes U : R(T) \leq k \,\} \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \{\, T \in \mathrm{Hom}(V, U) : \text{ las menores } (k+1) \times (k+1) \text{ de } T \text{ se desvanecen} \,\}.$$

**Ejercicio 2.2.** Demostrar el teorema de Strassen

$$\begin{aligned}\hat{M}_{2,2,2} =&(\alpha_1^1+\alpha_2^2)\otimes(\beta_1^1+\beta_2^2)\otimes(c_1^1+c_2^2)+\\ &(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\otimes \beta_1^1 \otimes(c_1^2-c_2^2)+\\ &\alpha_1^1 \otimes(\beta_2^1-\beta_2^2)\otimes(c_2^1+c_2^2)+\\ &\alpha_2^2 \otimes(\beta_1^2-\beta_1^1)\otimes(c_1^2+c_1^1)+\\ &(\alpha_1^1+\alpha_2^1)\otimes \beta_2^2 \otimes(c_2^1-c_1^1)+\\ &(\alpha_1^2-\alpha_1^1)\otimes(\beta_1^1+\beta_2^1)\otimes c_2^2 +\\ &(\alpha_2^1-\alpha_2^2)\otimes(\beta_1^2+\beta_2^2)\otimes c_1^1\end{aligned}$$

Y use el teorema para calcular el producto de $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}$.

---

# Semana 3.

**Ejercicio 3.1. ¿Cómo reconocer una suma directa?** Sea $(U,\rho_U)$ una representación de $G$ y sean $V_1, V_2 \subseteq U$ subespacios invariantes, de dimensiones $d_1$ y $d_2$ respectivamente.

1. Verifique que

$$\begin{aligned}V_i, \rho_i :&G \longrightarrow GL(V_i)\\ &g \longmapsto \rho_U(g)_{\restriction V_i}\end{aligned}$$

   es una representación de $G$ $[(V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2)]$.

2. $(U,\rho_U)\cong(V_1,\rho_1)\bigoplus(V_2,\rho_2)$ si y solo si:
   Existe una base $B=\{\overrightarrow{a_1},\dots,\overrightarrow{a_{d_1}},\overrightarrow{b_1},\dots,\overrightarrow{b_{d_2}}\}$ de $U$ tal que

   *a)* $B_1 := \{\overrightarrow{a_1},\dots,\overrightarrow{a_{d_1}}\}$ es una base de $V_1$.

   *b)* $B_2 := \{\overrightarrow{b_1},\dots,\overrightarrow{b_{d_2}}\}$ es una base de $V_2$.

   *c)* $\forall g\in G$, se tiene la siguiente igualdad:

$$[\rho_{V_1}(g)]_B = \left(\begin{array}{c|c}[\rho_{V_1}(g)]_{B_1} & 0\\ \hline 0 & [\rho_{V_2}(g)]_{B_2}\end{array}\right)$$

**Ejercicio 3.2.** Sea $S_3 \circlearrowright U=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$

$$\begin{aligned}\rho :&S_3 \longrightarrow GL(U)\\ &\sigma \longmapsto (e_i\mapsto e_{\sigma(i)})\end{aligned}$$

1. Demuestre que $V_1=\langle e_1+e_2+e_3\rangle$ y $V_2=\{a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3 : a_1+a_2+a_3=0\}$ son subespacios invariantes.

2. Demuestre que $U\cong V_1\bigoplus V_2$.

3. Demuestre que $V_2$ no tiene subespacios invariantes propios no triviales, es decir es una representación irreducible.

**Ejercicio 3.3.** Fije bases $B_A=\{\overrightarrow{a_1},\dots,\overrightarrow{a_{d_A}}\}$ del espacio vectorial $A$, $B_B=\{\overrightarrow{b_1},\dots,\overrightarrow{b_{d_B}}\}$ del espacio vectorial $B$, $B_C=\langle\overrightarrow{a_i}\otimes\overrightarrow{b_j} : i\in\{1,..,d_A\}, j\in\{1,...,d_B\}\rangle$ de $A\bigotimes B$. ¿Cómo es $[T_{(g_A,g_B)}]_{B_C}$ en términos de $[g_A]_{B_A}$ y $[g_B]_{B_B}$?

**Ejercicio 3.4.**

**Lema 3.1.** $(\mathrm{Sym}^k(V), \mu)$ satisface la siguiente propiedad universal:

$$\begin{tikzcd}
\overbrace{V \times V \times \cdots \times V}^{k\text{-copias}} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "T\ k\text{-lineal simétrica}"'] & \mathrm{Sym}^k(V) \arrow[dl, "!\varphi\ \text{lineal}"] \\
W &
\end{tikzcd}$$

Esto es, para todo espacio vectorial $W$ y para toda T $k$-lineal y simétrica, existe una única $\varphi$ lineal tal que $\varphi \circ \mu = T$. Es decir, $\varphi(v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k) = T(v_1, \ldots, v_k)$. Más aún, esta propiedad universal determina $(\mathrm{Sym}^k(V), \mu)$ de manera única módulo isomorfismo.

1. Demuestre el lema.
2. Para $V = \langle e_1, e_2 \rangle$, calcule $\mathrm{Sym}^3(V)$.

---

# Semana 4.

**Ejercicio 4.1.** Dado $V$ un espacio vectorial de dimensión $n$, muestre que si $F \in Sym^k(V)$ entonces, el rango de Waring de $F$, $R_w(F)$, cumple que $R_w(F) \leq \binom{k+n-1}{k}$.

**Ejercicio 4.2.** (Ejercicio 2.5.2.1 de [1]) Sean $A, B, C$ espacios vectoriales de dimensión, $a, b, c$ respectivamente, y sea $M_{a,b,c}$ es el tensor de multiplicación de matrices correspondiente, muestre que, visto como una forma trilineal en bases dadas, $M_{a,b,c}$ manda una tripla de matrices $(X, Y, Z)$ en $tr(XYZ)$, y es por lo tanto invariante bajo cambios de base en $A, B$ y $C$. Muestre además que la familia de algoritmos de nueve parámetros para $M_{2,2,2}$ es la acción de $SL(A) \times SL(B) \times SL(C)$ sobre la expresión del tensor. (La acción de escalares multiplicados por la identidad no afectara expresión de manera significativa pues identificamos $\lambda v \otimes w = v \otimes (\lambda w)$ para un escalar $\lambda$).

**Ejercicio 4.3.** (Ejercicio 2.6.6.3 de [1]) Dado $F \in Sym^k(V)$, sea $F_{s,k-s} \in Sym^s(V) \otimes Sym^{k-s}(V)$ su polarización parcial se define por : si $F = v_1^k + ... + v_n^k$ entonces $F_{s,k-s} = v_1^s \otimes v_1^{k-s} + ... + v_n^s \otimes v_n^{k-s}$. Sea $\underline{R}_w(F)$ el border rank simétrico de $F$. Muestre que si $\underline{R}_w(F) \leq k$, entonces $rango(F_{s,k-s})$ como aplicación lineal de $Sym^s(V)^*$ en $Sym^{k-s}(V)$ cumple que $rango(F_{s,k-s}) \leq k$ para todo $s$.

**Ejercicio 4.4.** Pruebe el siguiente lema.

**Lema 4.1.** Existe una única función lineal

$$\pi_{sgn} : V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes k} \tag{1}$$

tal que $\pi_{sgn}(v_1 \otimes ... \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum\limits_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)[v_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(k)}]$. Además, se cumple que

1. Si $T \in V \otimes k$ es alternante, entonces $\pi_{sgn}(T) = T$.
2. $Im(\pi_{sgn}) = \{T \in V^{\otimes k} : \sigma(T) = sgn(\sigma)T\}$.

**Ejercicio 4.5.** Sea $\bigwedge$ la transformación canónica, $\bigwedge : V^k \longrightarrow \bigwedge^k(V)$.Muestre el siguiente lema.

**Lema 4.2.**

1. $\bigwedge$ es $k$-lineal y alternante.

2. Dada $T : V^k \longrightarrow W$ multilineal y alternante, existe una única transformación lineal $\varphi : \bigwedge^k(V) \longrightarrow W$ que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
V^k \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "T"'] & \bigwedge^k(V) \arrow[dl, "\varphi"] \\
W &
\end{tikzcd}$$

**Ejercicio 4.6.**

(a) Demuestre el siguiente lema

**Lema 4.3.** $\bigwedge^k(V)$ tiene una base dada por $\{e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < .. < i_k \leq n\}$ con $n = dim(V)$, y por lo tanto $dim(\bigwedge^k(V)) = \binom{n}{k}$.

(b) Escriba $v_1 \wedge ... \wedge v_k$ en la base descrita en el lema, es decir, $v_1 \wedge ... \wedge v_k = \sum\limits_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} C_I e_{i_1} \wedge ... e_{i_k}$

(c) Muestre que $v_1 \wedge ... \wedge v_k = 0$ si y solo si $\{v_1, ...v_k\}$ es un conjunto linealmente dependiente en $V$.

**Ejercicio 4.7.** (Ejercicio 2.6.10 de [1])

1. Muestre que el subespacio $\bigwedge^k(V) \subset V^{\otimes k}$ es invariante bajo la acción de $GL(V)$.

2. Dado $v$ un espacio vectorial de dimensión $n$, como consecuencia del Lema 4.3, muestre que $\bigwedge^n(V) \cong \mathbb{C}, \bigwedge^l(V) = 0$ para $l > n$ y $\mathrm{Sym}^3 V \otimes \bigwedge^3 V \neq V^{\otimes 3}$ para $n > 1$.

3. Sea $\alpha \in V^*$ y $T \in V^{\otimes k}$, denotamos por $\alpha \lrcorner T$ a la contracción de $\alpha$ con $T$,definida en descomponibles por

$$V^* \times V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes k-1}$$
$$\alpha \times (v_1 \otimes ... \otimes v_k) \mapsto \alpha \lrcorner (v_1 \otimes ... \otimes v_k) = \alpha(v_1) v_2 \otimes ... \otimes v_k$$

   Calcule explicitamente $\alpha \lrcorner (v_1 v_2 ... v_k)$ y muestre que es, en efecto, un elemento de $\mathrm{Sym}^{k-1} V$ y de manera similar para $\alpha \lrcorner (v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k)$.

4. Muestre que la composición $\alpha \lrcorner \circ \alpha \lrcorner : \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^{k-2} V$ es el mapa 0.

5. Muestre que si $V = A \otimes B$ entonces existe una descomposición inducida en suma directa

$$\bigwedge^k V = \bigwedge^k A \oplus (\bigwedge^{k-1} A \otimes \bigwedge^1 B) \oplus ... \oplus (\bigwedge^1 A \otimes \bigwedge^{k-1} B) \oplus \bigwedge^k B$$

   de $\bigwedge^k V$ como $GL(A) \otimes GL(B)$-módulo.

6. Muestre que un subespacio $A \subset V$ determina una filtración inducida bien definida de $\bigwedge^k V$ dada por $\bigwedge^k A \subset \bigwedge^{k-1} A \wedge \bigwedge^1 V \subset \bigwedge^{k-2} A \wedge \bigwedge^2 V \subset ... \subset \bigwedge^k V$. Si $P_A = \{g \in GL(V) : g \cdot v \in A \; \forall \, v \in A\}$ entonces cada filtrando es un $P_A$-submódulo.

7. Muestre que si $V$ está equipado con una *forma volumétrica*, es decir, un elemento $\phi \in \bigwedge^n V$ no cero, entonces se tiene una identificación $\bigwedge^k V \cong \bigwedge^{n-k} V^*$.

8. Muestre que $V^* \cong \bigwedge^{n-1} V \otimes \bigwedge^n V^*$ como $GL(V)-$módulos.

9. Muestre que las álgebras tensorial, simétrica y exterior son asociativas.

**Ejercicio 4.8.** (Ejercicio 2.6.12 de [1]). Sea $f : V \longrightarrow V$,con $n = \dim(V)$, $f^{\wedge n} : \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n V$ se llama el determinante de $f$

1. Verifique que si $f$ tiene rango $n-1$ entonces $f^{\wedge n-1}$ tiene rango 1, y si $rango(f) \leq n-2$ entonces $f^{\wedge n-1}$ es cero.

2. Más generalmente, muestre que si $f$ tiene rango $r$ entonces $f^{\wedge s}$ tiene rango $\binom{r}{s}$.

3. Muestre que los autovalores de $f^{\wedge k}$ son los productos de $k$ de los autovalores de $f$

4. Dado $f : V \longrightarrow V$,con $n = \dim(V)$, $f^{\wedge n} : \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n V$ es una transformación lineal de un espacio de dimensión 1 en sí mismo y por lo tanto es una multiplicación por un escalar, muestre que si escogemos una base para representar $f$ con una matriz, entonces el determinante de dicha matriz es el escalar que representa a $f^{\wedge v}$.

5. Dado $f : V \longrightarrow V$ asuma que $V$ admite una base de autovectores de $f$,muestre que $\bigwedge^k V$ admite una base de autovectores de $f^{\wedge k}$ y encuentre los autovalores y autovectores de $f^{\wedge k}$ en términos de los de $f$. En particular muestre que el coeficiente $t^{n-k}$ de $det(f - tI)$, el polinomio característico de $f$, es $(-1)^k tr(f^{\wedge k})$, donde $tr(f^{\wedge k})$ es la suma de los autovalores de $f^{\wedge k}$.

6. Sea $f : V \longrightarrow W$ invertible con $dim(V) = dim(W) = n$, verifique que $f^{\wedge n-1} = f^{-1} \otimes det(f)$.

7. Fije $det \in \bigwedge^n V^*$. Sea
$$SL(V) = \{g \in GL(V) : g \cdot det = det\}$$
Muestre que $SL(V)$ es un grupo, este es llamado el *grupo lineal especial.*Muestre que si uno fija una base $\alpha^1, ..., \alpha^n$ de $V^*$ tal que $det = \alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^n$ y usa esta base y su dual para escribir los $g : V \longrightarrow V$ como matrices $n \times n$ entonces $SL(V)$ corresponde con las matrices de determinante 1.

8. Dados $E, F$ espacios vectoriales $n$-dimensionales, fije $\Omega \in \bigwedge^n E^* \otimes \bigwedge^n F$, dado que $dim(\bigwedge^n E^* \otimes \bigwedge^n F) = 1$, $\Omega$ es único salvo un factor de escala.Dado $f : V \longrightarrow W$ es posible escribir $f^{\wedge n} = c_f \Omega$ para algún escalar $c_f$. Muestre que si uno escoge bases $e_1, ...e_n$ para $E$ y $f_1, ...f_n$ para $F$ tal que $\Omega = e_1 \wedge ... \wedge e_n \otimes f_1 \wedge ... \wedge f_n$ y expresa $f$ como una matriz $M_f$ respecto a estas bases, entonces $c_f = det(M_f)$.

9. Muestre que $\Omega$ determina un vector $\Omega^* \in \bigwedge^n F^* \otimes \bigwedge^n E$ dado por $< \Omega, \Omega* >= 1$. Recuerde que $f : V \longrightarrow W$ determina un mapa lineal $f^T : W^* \longrightarrow V^*$. Use $\Omega^*$ para definir $det_{f^T}$, muestre que $det_f = det_{f^T}$.

**Ejercicio 4.9.** Muestres que $\bigwedge^k(T : U \longrightarrow V) = \bigwedge^k T : \bigwedge^k U \longrightarrow \bigwedge^k V$ es un funtor de la categoría de espacios vectoriales en si misma.

**Ejercicio 4.10.** Sean $A, B, C$ espacios vectoriales con bases $a_1, a_1; b_1, b_2 y c_1, c_2$ respectivamente, y sea
$$S = a_1 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_2 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_2 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_2$$
.

(a) Muestre que $R(S) \geq 3$.

(b) Verifique que ocurre en $V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_k$ para $k \geq 3$ con $dim(V_i) > 1$.

**Ejercicio 4.11.** Verifique que $\{T \in V_1 \otimes ... \otimes V_k : \underline{R}(T) \leq s\}$ es un conjunto cerrado en $V_1 \otimes ... \otimes V_k$.

## Semana 5. Fueron sesiones de ejercicios, no hay nuevos ejercicios.

---

## Semana 6.

**Ejercicio 6.1.**

- $X \in \mathbb{C}$ es algebraico si y solo si $X = \emptyset$, $X = \mathbb{C}$ o $|X| < \infty$
- Encuentre un $X \in \mathbb{C}^2$ cerrado (en la topología métrica) que no sea algebraico.

**Ejercicio 6.2.**

a) Demuestre que $\mathscr{A} = \{X \in \mathbb{C}^n : X \text{ es algebraico}\}$ satisface las siguientes propiedades:

  i) $\emptyset, \mathbb{C} \in \mathscr{A}$.

  ii) Si $A, B \in \mathscr{A}$ entonces $A \cup B \in \mathscr{A}$

  iii) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, con $A_\alpha \in \mathscr{A}$, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathscr{A}$

.

b) (V o F) La topología de Zariski en $\mathbb{C}^2$ es igual a la topología de Zariski en $\mathbb{C}$ dos veces es decir, $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

**Ejercicio 6.3.** Demuestre que $(f_1, ..., f_m) = \bigcap_{J \supset \{f_1,...,f_m\}} J$, con $J$ ideal.

**Ejercicio 6.4.** Muestre que $\dim(\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]_d)$=$\binom{n+d-1}{d}$

**Ejercicio 6.5.** Se dice que $I \subset R$ es homogéneo si existen elementos homogeneos $g_1, ..., g_s$ tales que $I = (g_1, ..., g_s)$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $I$ es homogéneo.

ii) $g \in I$ y $g = g_\alpha + ... + g_o$ en componentes homogeneas entonces $g_j \in I \ \forall j$

iii) $I_j := I \cap R_j \ \forall j \in \mathbb{N}$ entonces $I = \bigoplus_{i=0}^{\infty} I_j$

---

## Semana 7.

**Ejercicio 7.1.** Sea $(V, \rho)$ una representación de $G$ y $\rho^* : G \longrightarrow GL(\text{Fun}(V, \mathbb{C}))$ la acción contragradiente definida por $\rho^*(g) = \phi_g$ donde $\phi_g(f) = f \circ \rho(g)^{-1}$. Demuestre que $(\text{Fun}(V, \mathbb{C}), \rho^*)$ es una representación de $G$. Pregunta adicional: verificar que si $\rho^*$ no se define usando la inversa, entonces no es una representación.

**Ejercicio 7.2.** Demuestre que

$$\text{Sym}^\bullet(V^*) \cong \bigoplus_{k=0} \text{Sym}^k(V^*),$$

donde el isomorfismo es de representaciones.

**Ejercicio 7.3.** Si $W \subseteq \mathbb{C}^n$ es $G$-estable, entonces $\overline{W}$ es $G$-estable. Recuerde que $\overline{W}$ denota la clausura de Zariski del conjunto $W$.

**Ejercicio 7.4.** Demuestre que:

1. $\text{Sym}^2 V$ y $\bigwedge^2 V$ son representaciones irreducibles de $\text{GL}(V)$. Adicional: trabajar el caso $\text{sym}^k V$ y $\bigwedge^k V$ para todo $k$
2. Si $V_1$ es irreducible de $G_1$ y $V_2$ es irreducible de $G_2$, entonces $V_1 \otimes V_2$ es irreducible de $G_1 \times G_2$

**Ejercicio 7.5.** ¿A qué es igual $\bigwedge^2(A \otimes B)$ como representación de $\text{GL}(A) \times \text{GL}(B)$?

---

## Semana 8.

**Ejercicio 8.1.** Demuestre que los subconjuntos algebraicos de $\mathbb{P}^n$ forman una base de cerrados de una topología, la topología de Zariski (proyectiva). Recuerde que un subconjunto algebraico de $\mathbb{P}^n$ es:

$$\mathcal{V}_{\mathbb{P}}(I) = \{ [\alpha] \in \mathbb{P}^n : F(\alpha) = 0, \ \forall F \in I \},$$

para $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ un ideal homogéneo.

**Ejercicio 8.2.** (Variedades lineales) Demuestre la siguiente correspondencia:

$$\{ \mathcal{V}_{\mathbb{P}}(I) : I \subseteq \mathbb{C}[x_0, ..., x_n] \text{ generado por formas lineales } \} = \{ \mathbb{P}(A) : A \text{ es un subespacio de } V \}$$

en $\mathbb{P}(V)$.

**Ejercicio 8.3.**

**Definición 8.1.** Si $[v_1], ..., [v_k] \in \mathbb{P}^n$, el espacio proyectivo generado por ellos es:

$$\langle [v_1], ..., [v_k] \rangle = \{ [\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k] : \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{C}, \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k \neq 0 \}.$$

Demuestre que $\langle [v_1], ..., [v_k] \rangle \cong \mathbb{P}^t$ para algún $t$ ($t = \dim(\langle v_1, ..., v_k \rangle) - 1$) como variedades proyectivas.

**Ejercicio 8.4.** Demuestre el Nullstellensatz proyectivo:

**Teorema 8.1.** Se tiene la siguiente correspondencia:

$$\left\{ \begin{array}{r} I \subseteq \mathbb{C}[x_0, ..., x_n], \\ I \text{ homogéneo radical }, \\ I \subseteq \langle x_0, ..., x_n \rangle \end{array} \right\} \underset{\mathcal{V}_{\mathbb{P}}(-)}{\overset{\mathcal{I}(-)}{\leftrightarrows}} \left\{ \begin{array}{r} \text{subconjuntos algebraicos} \\ X \subseteq \mathbb{P}^n \end{array} \right\}.$$

**Ejercicio 8.5.** Si $X$ es un subconjunto algebraico de $\mathbb{P}^n$, demuestre que $R_X$ es un anillo graduado. Es decir, si definimos:

$$(R_X)_j = \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_j / \mathcal{I}(X)_j,$$

entonces:

1. Como espacio vectorial (anillo) $R_X = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (R_X)_j$.
2. $(R_X)_j (R_X)_k \subseteq (R_X)_{j+k}$ para cualesquiera $j, k$.

---

## Semana 9.

**Ejercicio 9.1.** Sea $F \neq 0$ un polinomio homogeneo de grado $e$ en $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ y sean $I = \langle F \rangle$, $R = \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]/I$.

(a) Calcule $HF(j)$ correspondiente a $R$.

(b) Verifique que $HF(j)$ coincide con un polinomio de grado $n-1$ para $j \gg 0$. Es decir, existe un $A$ tal que $HF(j) = Aj^{n-1} + O(j^{n-2})$ para $j \gg 0$.

**Ejercicio 9.2.** Si $V = \langle e_1, ..., e_n \rangle$ y $V^* = \langle x_1, ..., x_n \rangle$ con la base dual correspondiente, tenemos una identificación canónica:

$$\mathrm{Sym}^d(V)^* \longleftarrow \mathrm{Sym}^d(V^*).$$

(a) Demuestre que bajo esta identificación:

$$x^\alpha : \mathrm{Sym}^d(V) \to \mathbb{C}$$
$$x^\alpha(e_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \frac{1}{\binom{d}{\alpha}} & \text{si } \alpha = \beta, \end{cases}$$

utilizando la notación de multiíndice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$ y $\binom{d}{\alpha}$ es el coeficiente multinomial correspondiente.

(b) Pruebe que en estas coordenadas:

$$\begin{aligned} \gamma_d : V &\longrightarrow \mathrm{Sym}^d(V) \\ (a_1, ..., a_n) &\longmapsto (a_1^d, a_1^{d-1}a_2, \ldots a_n^d) \\ &= (\text{ monomios de grado } d \text{ en } a_1, ..., a_n \text{ }). \end{aligned}$$

**Ejercicio 9.3.** (La variedad de Veronese) Si $V = \langle e_1, ..., e_n \rangle$ y $d \in \mathbb{N}$, considere:

$$\begin{aligned} \gamma_d : \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d(V)) = \mathbb{P}^{\binom{n+d-1}{d}-1} \\ [a_1, ..., a_n] &\longmapsto [\text{ monomios de grado } d \text{ en } a_1, ..., a_n \text{ }], \end{aligned}$$

y definimos la $d$-ésima variedad de Veronese de $\mathbb{P}^{n-1}$ como $X := \gamma_d(\mathbb{P}^{n-1})$.

(a) Demuestre que $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathbb{C}[y_\alpha : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = d]$ es:

$$\mathcal{I}(X) = \langle y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} - y_{\beta_1} y_{\beta_2} : \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \rangle .$$

(b) Demuestre que $X \cong \mathbb{P}^{n-1}$ como variedades algebraicas proyectivas. [Ayuda: Utilice el hecho de que, si $f : X \to Y$ es una función entre vars. algebraicas y $f|_{U_i}$ es un morfismo para abiertos $U_i \subseteq X$ con $X = \bigcup_i U_i$, entonces $f$ es un morfismo. ]

---

# Semana 10.

**Ejercicio 10.1.** Sean $V$ y $W$ dos espacios vectoriales de dimensión $n$ y $m$ respectivamente, defina

$$\sigma : \mathbb{P}(V) \times P(W) \to \mathbb{P}(V \otimes W)$$

$$([v], [w]) \to [v \otimes w]$$

Que en coordenadas se escribe como

$$([a_1 : \cdots ; a_n], [b_1; \cdots ; b_m) \to \left[ \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_n b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 b_m & \cdots & a_n b_m \end{pmatrix} \right]$$

Defina $X = \sigma(\mathbb{P}(V) \times P(W))$. Demuestre que

$$\mathcal{I}(X) = \left( 2 \text{ x } 2 \text{ minors} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

**Ejercicio 10.2.**

- Demuestre que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con la topología producto de Zariski, no es homeomorfo a $X := \mathrm{im}(\sigma)$, donde $\sigma$ es el mapa del ejercicio anterior.
- Demuestre que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ no es isomorfo a $\mathbb{P}^2$. (Hint: Teorema de Bezout).

**Ejercicio 10.3.** Sean $V_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$, $V_2 = \langle f_1, f_2 \rangle$, $V_3 = \langle g_1, g_2 \rangle$, $[T] \in \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$, con

$$T = z_{111} e_1 \otimes f_1 \otimes g_1 + \cdots z_{222} e_2 \otimes f_2 \otimes g_2$$

y $X = \mathrm{im}(\sigma)$ como en el ejercicio 10.1. Defina los siguientes conjuntos de ecuaciones

- $A_1$: $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z_{111} & z_{112} \\ z_{121} & z_{122} \end{pmatrix} = 0$
- $A_2$: $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z_{211} & z_{212} \\ z_{221} & z_{222} \end{pmatrix} = 0$
- $B$ $\binom{4}{2}$ minors $= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} z_{111}z_{212} - z_{112}z_{211}, \cdots \\ z_{121}z_{222} - z_{121}z_{221}, \cdots \end{pmatrix}$

Sabemos que $X = \mathrm{V}((A_1) + (A_2) + (B))$.

1. Demuestre que $\mathcal{I}(X) = ((A_1) + (A_2) + (B))$. Hint: Si $a, b, c$ son las dimensiones de $\mathbb{P}(V_1)$,$\mathbb{P}(V_2)$ Y $\mathbb{P}(V_3)$ respectivamente
$$\mathrm{HF}_X(t) = \binom{a+t}{t}\binom{b+t}{t}\binom{c+t}{t}$$
2. Demuestre que $\mathrm{im}(\sigma)$ es cerrado para todo $k$
$$\sigma : \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2) \times \cdots \mathbb{P}(V_k) \to \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots V_k)$$

---

# Semana 11.

**Ejercicio 11.1.** Sea $V$ un espacio vectorial.

1. Demuestre que existe una correspondencia natural (Up to scalars)
$$\bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^{n-k} V^*$$
$$w \longrightarrow w^*$$
2. Defina
$$\varphi(w) : V \longrightarrow \bigwedge^{k+1} V$$
$$v \longrightarrow v \wedge w$$

$$\psi(w^*) : V^* \longrightarrow \bigwedge^{n-k+1} V^*$$
$$v^* \longrightarrow v^* \wedge w^*$$

Demustre que $w$ es descomponible si y sólo si $\mathrm{Ker}(\varphi(w)) = \mathrm{Ker}(\psi(w))^\perp$

3. Equivalentemente, $\forall \alpha \in \bigwedge^{k+1} V^*, \beta \in \bigwedge^{n-k+1} V$

$$\Xi_{\alpha,\beta}(w) = \left\langle \varphi^t(w)(\alpha), \psi^t(w)(\beta) \right\rangle = 0$$

donde si $f : A \to B$, $f^t : B^* \to A^*$ es el transpuesto de $f$ definido por $f^t(l) := l \circ f$. Verifique que es una ecuación cuadrática.

4. Encuentre el polinomio que define $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4)$.

**Ejercicio 11.2.** Sea $X \subset \mathbb{C}^n$ cerrado, las siguientes son equivalentes.

1. X es un cerrado irreducible
2. $\mathcal{I}(X) \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ es un ideal primo
3. $\mathbb{C}[X] := \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]/\mathcal{I}(X)$ es un dominio de integridad.

**Ejercicio 11.3.** Demuestre que si $X$ es una variedad y $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$ con $X_i$ irreducibles y $X \neq \bigcup_{j \neq i} X_j$ para todo $i$, entonces la descomposición es única.

**Ejercicio 11.4.** Si $X_j$ son las componentes irreducibles de una variedad $X$, $\mathrm{Dim}(X) = \max_j \mathrm{Dim}(X_j)$

**Ejercicio 11.5.** Utilizando lo visto durante la clase del 21 de abril, demuestre el Lema de Normalización de Noether

**Lema 11.1.** Si $S = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]/J$, existen $k \in \mathbb{N}$, $y_1, \cdots, y_k \in S$ tales que

1. $\mathbb{C}[y_1, \cdots, y_k] \subset S$
2. $\mathbb{C}[y_1, \cdots, y_k] \subset S$ es una extensión entera.

---

## Semana 12.

**Ejercicio 12.1.** Sean $X := \{[A] : \mathrm{rank}\, A \leq 1\} \subseteq \mathbb{P}^{mn-1}$ y $Z := \sigma_j(A)$. Demuestre que

1. $Z = \{[A] : \mathrm{rank}\, A \leq j\}$
2. $Z$ es irreducible y $\dim(Z) = j(n + m - j) - 1$.

**Ejercicio 12.2.** Si $Y$ es variedad irreducible y $U, V \subseteq Y$ abiertos. Pruebe que

- $U$ es denso si y solo si es no vacío.
- Si $U, V$ no son vacíos entonces $U \cap V \neq \varnothing$.

**Ejercicio 12.3.**

- Si $X$ y $Y$ son irreducibles entonces $X \times Y$ es irreducible.
- Si $U \subseteq X$ y $X$ es irreducible entonces $U$ es irreducible.
- Si $X$ es irreducible y $f : X \to Y$ entonces $f(X)$ es irreducible.
- Si $Z$ es irreducible entonces $\overline{Z}$ es irreducible.

## Referencias

[1] Joseph M Landsberg. Tensors: geometry and applications. *Representation theory*, 381(402):3, 2012.