Hoy: Ejemplo "Variedades de Segre"

$$\{[T] \in V_1 \otimes \dots \otimes V_k : R(T) = 1\} \subseteq \mathbb{P}(V_1 \otimes \dots \otimes V_k)$$

Queremos ver que es un conjunto algebraico, queremos describir sus ecuaciones y su anillo coordenado, su función de Hilbert, etc....

$k=2$ $\quad \dim(V)=n,\ \dim(W)=m$

$$X = \{[T] \in V \otimes W : R(T)=1\} \subseteq \mathbb{P}(V \otimes W) = \mathbb{P}^{n \cdot m - 1}$$

Sabemos que $V \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V^*, W)$

$T \longmapsto \{\varphi(T) : \dim(\mathrm{im}\,\varphi(T)) \leq 1\}$

$V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$

$W = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$

$$T \in V \otimes W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}\, e_i \otimes f_j$$

tomamos coordenadas duales a $e_i \otimes f_j$

$$X = \left\{ \left[\begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \right] : \mathrm{rank}() \leq 1 \right\}$$

menores 2×2 deben desvanecerse todos.

Concluimos que $X \subseteq \mathbb{P}(V \otimes W)$ es un subconjunto algebraico de $\mathbb{P}$.

$$X = V\left(2\times 2 \text{ minors}\left(\quad\right)\right) \longleftrightarrow I(X) = \sqrt{(2\times 2 \text{ minors})}$$

Es $I(X) \overset{?}{=} (2 \times 2 \text{ minors})$?

Para ello queríamos saber algo más de $HF_X(j)$.

$$X = \{[v \otimes w] : v \in V, w \in W\}$$

$$
\begin{array}{ccc}
(v,w) & \longmapsto & v\otimes w \\
V\times W & \xrightarrow{\ \sigma\ } & V\otimes W
\end{array}
$$

$n=3$
$V=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$
$m=2$
$W=\langle f_1,f_2\rangle$

$$(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3),\ (b_1f_1+b_2f_2) \longmapsto (a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)\otimes(b_1f_1+b_2f_2)$$

$$\Big((a_1,a_2,a_3),\ (b_1,b_2)\Big) \longrightarrow \big(a_1b_1\, e_1\otimes f_1 + a_1b_2\, e_1\otimes f_2 + a_2b_1\, e_2\otimes f_1 + a_2b_2\, e_2\otimes f_2 + a_3b_1\, e_3\otimes f_1 + a_3b_2\, e_3\otimes f_2\big)$$

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{22} & x_{31} & x_{32}
\end{array}
$$
$$\big[(a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_1,\ a_3b_2)\big]$$

polinomios en $\mathbb{C}[a_1,a_2,a_3,b_1,b_2]$
con grado 1 en a's
grado 1 en b's.

Monomios de grado $(1,1,1,\ldots,1)$
en los diferentes conjuntos de variables.

$$\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2\\ a_2b_1 & a_2b_2\\ a_3b_1 & a_3b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\\ x_{31} & x_{32}\end{bmatrix}$$

Queremos estudiar $HF_X(t) = \dim_{\mathbb{C}}\left[\left(\mathbb{C}[x_{ij}]\big/\mathcal{I}(X)\right)_t\right]$

Si $p(x) = x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21}$, podemos hacer pullback a través de σ (componer con σ) y obtenemos
$$p(\sigma(a,b)) = (a_1b_1)(a_2b_2) + (a_1b_2)(a_2b_1) = \boxed{2a_1a_2b_1b_2}.$$

grado 2 en a's
2 en b's.

$$\mathbb{C}[x_{ij}]_t \xrightarrow{\ \sigma^*\ } \text{“Polinomios de grado } t \text{ en } a\text{'s y en } b\text{'s”}$$

$$\mathrm{Ker}(\sigma^*) = \mathcal{I}(X)_t$$

$$\mathbb{C}[x_{ij}]_t\big/\mathcal{I}(X)_t \xrightarrow[\ \cong\ ]{\ \sigma^*\ } \text{“Polinomios de grado } (t,t,\ldots,t) \text{ en los conjuntos de variables”}$$

Si $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$

$$\boxed{HF_X(t) = \binom{n+t-1}{t}\binom{m+t-1}{t}}$$

Ejercicio: $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$

$$\sigma: \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \longrightarrow \mathbb{P}(V \otimes W)$$
$$([v],[w]) \longmapsto [v \otimes w]$$

En coords

$$([a_1 \dots a_n], [b_1 \dots b_m]) \xrightarrow{\sigma} \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_n b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 b_m & \dots & a_n b_m \end{bmatrix}$$

$X = \sigma(\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W))$

demuestre que $\mathcal{I}(X) = \left(2\times 2 \text{ minors } \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \right)$

El mapa de Segre nos permite construir el "producto" de variedades proyectivas.

Def: (X, π_A, π_B) es el producto de los objetos A y B en una categoría si $X \in Ob$

$\pi_A : X \longrightarrow A$ morfismo

$\pi_B : X \longrightarrow B$ morfismo y

se cumple $\forall Z \in Ob$ $\forall f_A \in Mor(Z, A)$, $f_B \in Mor(Z, B)$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[drr, bend left, "f_A"] \arrow[ddr, bend right, "f_B"'] & & \\
& X \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\pi_B"] & A \\
& B &
\end{tikzcd}$$

existe un único φ que hace conmutar el diagrama.

Obs: Si (X, π_A, π_B) y (X', π_A', π_B') satisfacen la prop $\Rightarrow$ existe un isomorfismo φ:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\varphi"', "\cong"] \arrow[drr, bend left, "\pi_B'"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_A'"'] & & \\
& X \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

$\pi_B \circ \varphi = \pi_B'$

$\pi_A \circ \varphi = \pi_A'$.

UNICIDAD MUY FUERTE DEL PRODUCTO

Ejemplo: $\mathcal{O}b$ = "Finitos"

$\mathcal{M}or$ = "Funciones"

A, B, Quiero $Prod(A, B)$

$Prod(A,B) := A \times B$

$$\begin{tikzcd}
\{1\} = Z \ni x \arrow[r, mapsto, "(f_A(x),\, f_B(x))"] \arrow[rr, bend left, "f_B"] \arrow[dr, bend right, "f_A"'] & Prod(A,B) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Lema: Sean V, W e.v. y considere

$$\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}(V \otimes W)$$
$$([v],[w]) \longmapsto [v \otimes w]$$

(1) σ está bien definido

(2) σ es 1-1 y por lo tanto

Variedad algebraica

σ es una biyección entre $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$ y
$\mathrm{im}(\sigma) = X = \{[T] \in V \otimes W : R(T) = 1\}$.

$\boxed{(3)}$ $(X, \pi_{\mathbb{P}(V)}, \pi_{\mathbb{P}(W)})$ es un producto para $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(W)$ en la categoría de variedades algebraicas.

Obs: Si $X \subseteq \mathbb{P}(V)$, y $Y \subseteq \mathbb{P}(W)$ cerrado

$\sigma(X \times Y) \subseteq \sigma(\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W))$

cerrado y que es producto de X y Y?

$$V \times W \xrightarrow{\otimes} V \otimes W$$

$$\begin{tikzcd} V\setminus\{\vec 0\} \times W \setminus\{\vec 0\} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[rr, bend left, "\Gamma"] & (V\otimes W)\setminus\{0\} \arrow[r, "/\sim"] & \mathbb{P}(V\otimes W) \end{tikzcd}$$

$$(v,w) \longmapsto v\otimes w \longrightarrow [v\otimes w]$$

$\Gamma(\lambda v, w) = \Gamma(v,w)$ $\qquad (\lambda v, w) \longmapsto \lambda v\otimes w \longmapsto [\lambda v \otimes w]$

$\Gamma(v,\lambda w) = \Gamma(v,w)$ $\qquad [\lambda v\otimes w] = [\lambda(v\otimes w)] = [v\otimes w]$

luego está bien definido ...

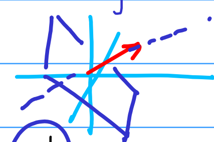
$$\mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(W) \xrightarrow[1\text{-}1]{\Gamma} \mathbb{P}(V\otimes W)$$

$$([v],[w]) \longmapsto [v\otimes w]$$

$$[a_1,\dots,a_n],[b_1,\dots,b_m] \overset{\sigma}{\longmapsto} \left[\begin{bmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_m & \cdots & a_nb_m \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} [a_1,\dots,a_n]\right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} [4 \ -2] = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$V\otimes W = \mathrm{Hom}(V^*, W)$$



$[v\otimes w] = [T]$ $\qquad T(v^*) = v^*(v)\, w$

$$[T] \rightsquigarrow \{v^* \in V^* : \lambda T(v^*) = 0\} = V^\perp$$

$$\rightsquigarrow \{w^* \in W^* : \lambda T(w^*) = 0\} = W^\perp$$

$$w^*(w)\,\vec v$$

Ejemplo:

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^3$$

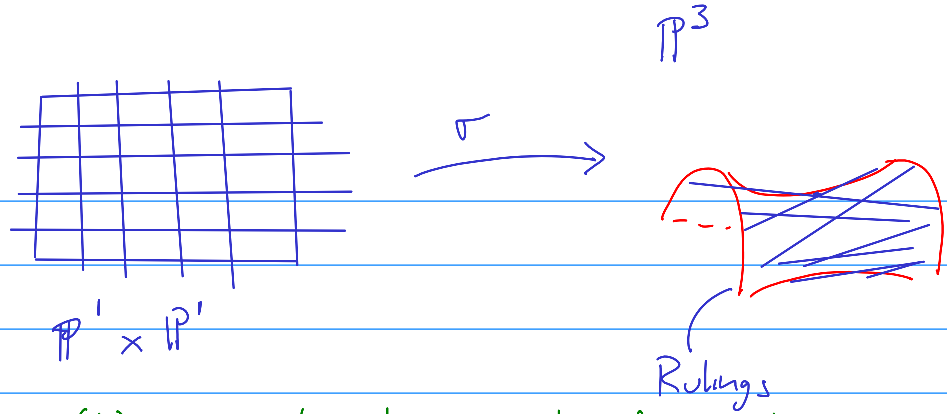
$$([a_1,a_2],[b_1,b_2]) \longmapsto [\underset{X_0}{a_1b_1} \quad \underset{X_1}{a_1b_2} \quad \underset{X_2}{a_2b_1} \quad \underset{X_3}{a_2b_2}]$$

$$\begin{bmatrix} X_0 & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{im}(\sigma) = V(\underline{X_0X_3 - X_1X_2})$$

$$\begin{array}{c|cccc} & X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 \\ X_1 & 0 & 0 & \frac12 & 0 \\ X_2 & & \frac12 & 0 & 0 \\ X_3 & \frac12 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ejercicio: (a) Demuestre que si Q es una cuádrica de rango 4 en $\mathbb{P}^3$ $V(Q) \cong \sigma(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$



(b) Encuentre las familias de rectas que cubren $x^2+y^2-z^2=1 \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\boxed{Q = x^2+y^2-z^2-w^2}$$

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \xleftrightarrow{\ \sigma\ } X \subseteq \mathbb{P}^3$$

$[a_1 a_2], [b_1 b_2]$

$[X_0 \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3]$

$[a_1b_1 : a_1b_2 : a_2b_1 : a_2b_2]$

$\Pi^{(1)}_{\mathbb{P}^1}$ [morfismo de v.a.] $\to \mathbb{P}^1$

si $X_0 \neq 0$, $X_2 \neq 0$: $[X_0 : X_2]$

$[a_1b_1 : a_2b_1] = [a_1 : a_2]$ si $b_1 \neq 0$

si $X_1 \neq 0$, $X_3 \neq 0$: $[X_1 : X_3]$

$= [a_1b_2 : a_2b_2] = [a_1 : a_2]$ si $b_2 \neq 0$

$$\Pi^{(1)}_{\mathbb{P}^1} \circ \sigma = \Pi_1$$

Verificamos:

(1) Todo punto de X está en alguno de nuestros dos abiertos, es decir

$U_1 = (X_0 \neq 0 \text{ ó } X_2 \neq 0)$ $\quad U_2 = (X_1 \neq 0 \text{ ó } X_3 \neq 0)$ ✓

(2) En $X \cap U_1 \cap U_2$ los mapas coinciden.

$[X_0 : X_2] = [a_1b_1 : a_2b_1] \overset{\text{en } U_1}{=} [a_1 : a_2]$

$[X_1 : X_3] = [a_1b_2 : a_2b_2] \overset{\text{en } U_2}{=} [a_1 : a_2]$ ✓

Hemos construido (X, Π_A, Π_B)

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, bend left, "f_W"] \arrow[dr, bend right, "f_V"'] & & \mathbb{P}(W) \\ & \mathbb{P}(V) & \end{tikzcd}$$