Repaso: Variedades de Segre de 2 factores

Si V, W son e.v.'s, definimos una función

$$\mathbb{P}V \times \mathbb{P}W \xrightarrow{\ \sigma\ } \mathbb{P}(V\otimes W)$$
$$([v],[w]) \longrightarrow [v\otimes w]$$

Teorema: [Segre de 2 factores] Las siguientes afirmaciones son ciertas:

(1) En coordenadas $V = \langle e_0,\dots,e_n\rangle$ $\quad \langle x_0,\dots,x_n\rangle = V^*$

$W = \langle f_0,\dots,f_m\rangle$ $\quad \langle y_0,\dots,y_m\rangle = W^*$

$V\otimes W = \mathrm{Hom}(V^*, W)$ $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V^*,W))$

$$([x_0:\dots:x_n],[y_0:\dots:y_m]) \xrightarrow{\ \sigma\ } \left[\begin{bmatrix} x_0y_0 & \cdots & x_0y_m \\ \vdots & & \\ x_ny_0 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix}\right]$$

(2) $\underset{X}{\mathrm{im}(\sigma)} \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V^*,W))$

- X es un conjunto algebraico
- $X = \{$matrices de rango 1$\}$
- $\mathcal{I}(X) = \left(2\times 2 \text{ minors}\left(\begin{bmatrix} z_{00} & \cdots & z_{0m} \\ \vdots & & \\ z_{n0} & \cdots & z_{nm}\end{bmatrix}\right)\right)$
- $\boxed{HF_X(t) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\left(\dfrac{\mathbb{C}[z_{ij}]}{\mathcal{I}(X)}\right)_t\right) = \binom{n+t}{t}\binom{m+t}{t}}$

(3) X está dotada de morfismos

$\pi_1 : X \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ → span de filas

$\pi_2 : X \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ → span de columnas

que satisfacen la siguiente propiedad universal del producto

$\forall Z\ \forall f_V, f_W$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[drr, bend left, "f_V"] \arrow[ddr, bend right, "f_W"'] & & \\ & X \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & \mathbb{P}(V) \\ & \mathbb{P}(W) & \end{tikzcd}$$

$\varphi := \sigma(f_V, f_W)$

Podemos definir $\mathbb{P}V \underset{\sim}{\times} \mathbb{P}W := \operatorname{im}(\sigma) \subseteq \mathbb{P}(V \otimes W)$

Ejercicio:

(1) Demuestre que $\left(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \underset{(\mathbb{P}^1, \text{Zar})}{\text{top producto de}} \right)$

no es homeomorfo a $X \subseteq \mathbb{P}(V \otimes W)$.

Zar.

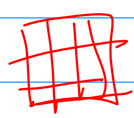
(2) Demuestre que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 := X \not\cong \mathbb{P}^2$

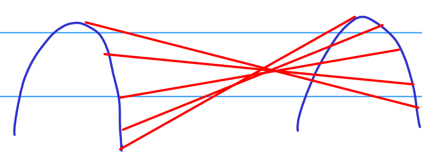
(*Hint: Teorema de Bezout)

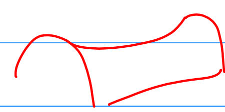
Ejemplo: $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} : xw - yz = 0 \subseteq \mathbb{P}^3$

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^3$$

$$[a:b]\,[c:d] \longmapsto \begin{bmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix}$$







Rulings

Qué pasa con $k=3$ factores?

$$\mathbb{P}V_1 \times \mathbb{P}V_2 \times \mathbb{P}V_3 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$$

$$([v_1], [v_2], [v_3]) \longmapsto [v_1 \otimes v_2 \otimes v_3]$$

En coordenadas $\qquad \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$

$$([x_0 : \dots : x_n], [y_0 : \dots : y_m], [w_0 : \dots : w_p]) \xrightarrow{\sigma} (x_i\, y_j\, w_k) \quad \begin{matrix} 0 \le i \le n \\ 0 \le j \le m \\ 0 \le k \le p \end{matrix}$$

$\mathrm{im}(\sigma) =: X = \{ [T] : T \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ es totalmente descomponible $\}$

Es $\mathrm{im}(\sigma)$ cerrado? Cuáles son sus ecuaciones?

* **Lema:** $T \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ es totalmente descomponible

ssi (1) $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in V_1^*$ $\quad T(\alpha_1), T(\alpha_2) \in V_2 \otimes V_3$ son descomponibles

(2) $[T(\alpha_1)] = [T(\alpha_2)]$

"$\Rightarrow$"

Dem: Si $T = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ entonces

(1) Si $\alpha \in V_1^*$ $\quad T(\alpha) = \alpha(v_1)\, v_2 \otimes v_3$ es tot desc.

(2) Si $\alpha_1, \alpha_2 \in V_1^*$ $\quad T(\alpha_1) = \alpha_1(v_1)\, v_2 \otimes v_3$

$T(\alpha_2) = \alpha_2(v_1)\, v_2 \otimes v_3$

luego $[T(\alpha_1)] = [T(\alpha_2)]$.

"$\Leftarrow$" Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ base de V_1^*

$$\left\{ \begin{array}{l} T(\alpha_1) = c_1\, v_2 \otimes v_3 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ T(\alpha_n) = c_n\, v_2 \otimes v_3 \end{array} \right. \rightsquigarrow \quad \alpha_i(v_1) = c_i \qquad v_1 := \sum_{i=0}^{n} c_i u_i$$

con $u_i \in V_1$ base dual de α_i

$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 = \mathrm{Hom}(V_1^*, V_2 \otimes V_3)$

$\quad T \qquad\qquad\qquad T$

$T = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$

(porque $T(\alpha) = \alpha(v_1)\, v_2 \otimes v_3$ $\forall \alpha \in V_1^*$)

De acá es fácil ver que $\mathrm{im}(\sigma)$ es cerrada.

$V_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$

$V_2 = \langle f_1, f_2 \rangle$

$V_3 = \langle g_1, g_2 \rangle$

z_{ijk} son $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

$[T] \in \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$

$T = z_{111}\, e_1 \otimes f_1 \otimes g_1 + \dots + z_{222}\, e_2 \otimes f_2 \otimes g_2$

$[z] \in X$?

Sean α_1, α_2 dual de e_1, e_2

$$T(\alpha_1) = z_{111}\, f_1 \otimes g_1 + z_{112}\, f_1 \otimes g_2$$
$$z_{121}\, f_2 \otimes g_1 + z_{122}\, f_2 \otimes g_2$$

$$(A_1) \qquad \det \begin{bmatrix} z_{111} & z_{112} \\ z_{121} & z_{122} \end{bmatrix} = 0$$

$$T(\alpha_2) = z_{211}\, f_1 g_1 + z_{212}\, f_1 g_2$$
$$z_{221}\, f_2 g_1 + z_{222}\, f_2 g_2$$

(A_2) $\det \begin{bmatrix} z_{211} & z_{212} \\ z_{221} & z_{222} \end{bmatrix} = 0$

$[T(\alpha_1)] = [T(\alpha_2)]$

$$\begin{array}{cccc} f_1 \otimes g_1 & f_1 \otimes g_2 & f_2 \otimes g_1 & f_2 \otimes g_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} z_{111} & z_{112} & z_{121} & z_{122} \\ z_{211} & z_{212} & z_{221} & z_{222} \end{bmatrix}$$

uno es múltiplo del otro

(B) $\binom{4}{2}$ menores $= \begin{pmatrix} z_{111} z_{212} - z_{112} z_{211}, \ldots \\ z_{121} z_{222} - z_{121} z_{221} \end{pmatrix}$

$V\big((B)+(A_1)+(A_2)\big) = X$

Ejercicio: (a) demuestre que $I(X) = \big((B)+(A_1)+(A_2)\big)$

(Ayuda $HF_X(t) = \binom{a+t}{t}\binom{b+t}{t}\binom{c+t}{t}$ si a, b, c son dim $\mathbb{P}(V_1), \mathbb{P}(V_2), \mathbb{P}(V_3)$)

(b) Lema * es válido para cualquier # de factores demuestre $\operatorname{im}(\sigma)$ es cerrado para todo k $\left(\mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(V_k) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_k)\right)$

(c) Construya mapas $X \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{P}(V_i)$ y verifique que son morfismos.

$$\mathbb{P}V_1 \times \mathbb{P}V_2 \times \mathbb{P}V_3 \underset{\pi}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} X$$

$(\pi_1 x, \pi_2 x, \pi_3 x) \leftarrow\!\shortmid\, x$

$\sigma(\pi(x)) = x \qquad \pi(\sigma(u, v, w)) = (u, v, w)$

Sea $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$

$$Gr(k, V) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Subespacios vectoriales } W \subseteq V \\ \text{con } \dim(W) = k \end{array} \right\}$$

Dotemos a este espacio de estructura de variedad algebraica proyectiva.

Idea: Definimos el mapa de Plücker

$$\begin{array}{ccc} Gr(k,V) & \xrightarrow{\;\Psi\;} & \mathbb{P}(\Lambda^k V) \\ W \subseteq V & \longrightarrow & [w_1 \wedge \dots \wedge w_k] \end{array}$$

(1) [Sean $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$ una base de W]

(2) Construya $[w_1 \wedge \dots \wedge w_k]$

Obs: Ψ está bien definida, es decir si tomamos OTRA base para W obtenemos el mismo punto de $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$.

Razón: Al aplicar operaciones elementales

(a) $(w_1, \dots, w_k) \longrightarrow (\lambda w_1, w_2, \dots, w_k)$

(b) $(w_1, \dots, w_k) \longmapsto (w_1 + \eta w_j, w_2, \dots, w_k)$

la imagen no cambia.

$$[\lambda w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k] = [\lambda (w_1 \wedge \dots \wedge w_k)] = [w_1 \wedge \dots \wedge w_k]$$

$$[w_1 + \eta w_j \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k] = [\,w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k + \eta \underbrace{w_j \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k}_{\substack{w_j \text{ se repite} \\ \| \\ 0}}\,]$$

$$= [w_1 \wedge \dots \wedge w_k].$$

Si definimos $X = \operatorname{im}(\Psi)$.

$$X = \{ [T] : T \in \Lambda^k V,\ T \text{ es totalmente descomponible} \} \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$$

Mostramos: (1) Ψ es biyección, es decir podemos recuperar W a partir de $\Psi(W)$

(2) $\operatorname{im}(\Psi)$ es un conjunto algebraico

"Grassmanniana de subespacios k-dimensionales del espacio vectorial V $[Gr(k,V)]$"

Obs: $Gr(k,V) \cong Gr(k-1, \mathbb{P}V)$

Si $\omega \in \Lambda^k V$ descomponible

$L_\omega := \{v \in V : \underset{\Lambda^{k+1}V}{v \wedge \omega} = 0\} \subseteq V$ (subespacio lineal)

Lema:

$\underbrace{\dim(L_\omega) \geq k}$ $\iff$ $\omega \in X$

Veremos que esta condición es algebraica luego X es cerrado de Zariski

y en ese caso $\omega = \lambda v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ con $\langle v_1, \dots v_k \rangle = L_\omega$.

$[\psi(\omega) \in X]$

$\forall \omega \in X \ \exists! \ \omega :$

$\psi(\omega) = \omega$

L_ω

Lema 2: $\omega \in \Lambda^k V$, $v \in V$

$v \wedge \omega = 0 \iff \omega = v \wedge \alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda^{k-1} V$

Dem: Sean $\overset{v}{\overset{\shortparallel}{v_1}}, v_2, \dots, v_n$ base para V

$\Lambda^k V = \langle \underbrace{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}}_{v_I, \ I = \{i_1, \dots, i_k\}} : 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \rangle$

$$\omega = \Big(\sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = k \\ I \ni 1}} c_I v_I \Big) + \Big(\sum_{\substack{J : J \subseteq [n] \\ |J| = k \\ J \not\ni 1}} c_J v_J \Big)$$

$$v \wedge \omega = \sum_{\substack{J : J \subseteq [n] \\ J \not\ni 1}} c_J (v_J \wedge v_1) = 0$$

$c_J = 0 \ \forall J$!

$$\omega = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = k \\ I \ni 1}} c_I v_I = v_1 \wedge \alpha$$

no contiene al 1 en esta rep.

Si $L_\omega = \{v \in V : v \wedge \omega = 0\}$

y $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$ base para L_ω

podemos extenderla a una base $v_1, \dots, v_n$ de V

y representar a ω en esa base

$v_1 \wedge \omega = 0 \implies \omega = v_1 \wedge \alpha$ α no involucra v_1

$v_2 \wedge \omega = 0 \implies v_2 \wedge v_1 \wedge \alpha = 0 \implies v_2 \wedge \alpha = 0$ (porque α no involucra v_1)

$\alpha = v_2 \wedge \alpha' \implies \omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \alpha'$ ← ni v_1, ni v_2

$v_3 \wedge \omega = 0 \implies v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge \alpha' = 0 \implies v_3 \wedge \alpha' = 0$

$\implies \alpha' = v_3 \wedge \alpha'' \ \dots$

$\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_j \wedge \alpha^{(j+1)}$

Si $\dim(L_\omega) \geq k \Rightarrow$ (1) $\dim(L_\omega) = k$

(2) $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_k \, \lambda$ y (3) $[\omega] = [v_1 \wedge \dots \wedge v_k]$

$[\omega] = \psi(L_\omega)$

Si $\dim(L_\omega) \geq k \Rightarrow [\omega] \subset \mathbb{P}(\Lambda^k V)$

es tot descomponible.

Recíprocamente, si $[\omega] = [v_1 \wedge \dots \wedge v_k]$

$[\omega = \lambda \, v_1 \wedge \dots \wedge v_k]$

$L_\omega = \{ v : v \wedge (\lambda v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = 0 \} \supseteq \langle v_1, \dots, v_k \rangle$

$\dim(L_\omega) \geq k$.

$L_{\psi(W)} = W$ luego ψ es 1-1.