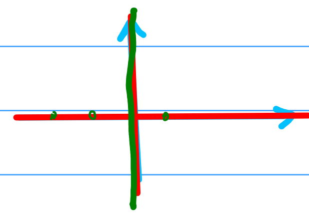
Hoy: Dimensión de variedades algebraicas.

(1) Dimensión es un concepto topológico:

Def: X es reducible si $\exists$ cerrados $A, B \subsetneq X$ tales que $X = A \cup B$. X es irreducible si no es reducible.

$X \subseteq \mathbb{C}^2$, $\quad X = V(xy)$



$X = V(x) \cup V(y)$

$\mathbb{C}[y] = \mathbb{C}[x,y]/(x) \cong \mathbb{C}[y]$ ← irreducible

Ejercicio: Sea $X \subseteq \mathbb{C}^n$ cerrado, las sig son equiv.

(1) X irreducible

(2) $I(X) \subseteq \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$ es ideal primo ($fg \in I \Rightarrow f \in I$ ó $g \in I$)

(3) $\mathbb{C}[X] := \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]/I(X)$ es un dominio de integridad

$$X \xrightarrow{\text{irred?}} \begin{cases} \text{sí: } X \\ \text{no: } X_1 \cup X_2 \to X_{11} \cup X_{12} \cup X_{21} \cup X_{22} \end{cases}$$

Hecho: $(\mathbb{C}^n, \mathcal{J}_{Zar})$ son espacios top Noeth, es decir toda cadena descendente de cerrados es eventualmente estacionaria.

$$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots \supseteq Z_k \supseteq \dots$$

Consec: Toda variedad es unión de finitas irreducibles

$X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ llamadas compts irred.

Ejercicio: Demuestra que, si $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$, X_i irred y $X \neq \bigcup_{j \neq i} X_j \ \forall i$

$\Rightarrow$ la des comp. es **única**

$$\mathbb{C}^4 \supseteq \mathbb{C}^3 \supseteq \underbrace{\mathbb{C}^2}_{\text{irred}} \supseteq \mathbb{C}^1 \supseteq \{pt\}$$

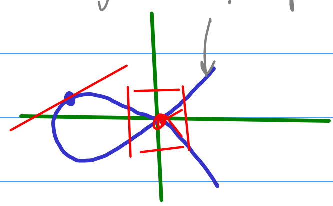
longitud k

Def:

$$\dim(\underbrace{X}_{\text{espacio top}}) = \sup\{k : \exists X_j \text{ cerrados irred}: X \supseteq \boxed{X_k \supsetneq X_{k-1} \supsetneq \cdots \supsetneq X_0}\}$$

Ejercicio: Si X_j son las componentes irred de X $\Rightarrow$ $\dim(X) = \max_j \dim(X_j)$ irred por singular.

Ej:



$X = F^{-1}(0)$

$$F(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

Otro punto de vista para la dim es:

Def: Sea $X \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad $\quad I(X) = (g_1, \dots, g_m)$

Si $p \in X$ definimos $\quad T_pX := \ker(DF(p))$

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(p) & & & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}$$

Teorema: Sea X irreducible.

$$\{p \in X : \underbrace{\dim_{\mathbb{C}}(T_pX)}_{\text{como espacio vect}} \geq \underbrace{\dim X}_{\text{como variedad}}\}$$ es abierto de Zar y no vacío.

En casi todo punto de X $\dim(T_pX) = \dim(X)$.

Ejercicio: Si X es irreducible U, V abiertos no vacíos entonces:

(1) $U \cap V \neq \emptyset$

(2) $\overline{U} = \overline{V} = X$.

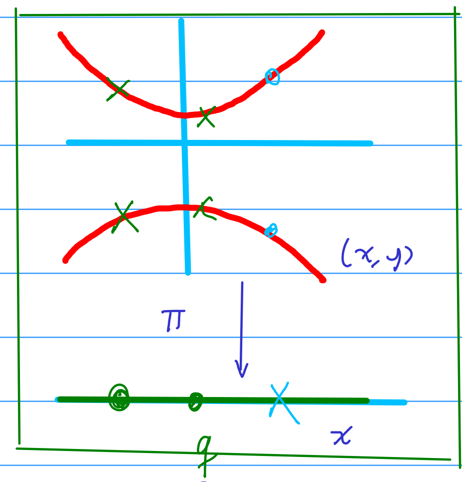
Def: Sean R, S anillos con $R \subseteq S$.
S es <u>entero</u> arriba de R si $\forall s \in S$ $\exists$ $p(z) \in R[z]$ MÓNICO
$p(s) = 0$.

$$p(z) = 1 \cdot z^n + \underbrace{r_{n-1} z^{n-1} + \dots + r_1 z + r_0}_{\in R}$$

Ejemplo:

$$S = \mathbb{C}[x,y] / (y^2 - x^2 - 1)$$

$$\begin{array}{ccc} S & & [p(x)] \\ \pi^* \uparrow 1\text{-}1 & & \uparrow \\ R = \mathbb{C}[x] & & p(x) \end{array}$$



$S \supseteq R$ es entera. Basta demostrar que $y \in S$ es entera sobre R

$$p(z) = 1 \cdot z^2 - \underbrace{(x^2+1)}_{r_0} \in R[z]$$

$$p(y) = y^2 - x^2 - 1 = 0 \text{ en } S$$

Def: Un morfismo $f: X \longrightarrow Y$ entre variedades X, Y es finito ssi
$\exists$ U_i abiertos, afines de Y con $Y = \bigcup_i U_i$
tales que $f^{-1}(U_i)$ son afines de X
y $\mathbb{C}[f^{-1}(U_i)] \xleftarrow{f^*} \mathbb{C}[U_i]$
es entera.

[**Teorema:** Si $f: X \longrightarrow Y$ es un morfismo finito entonces $\dim(X) = \dim(Y)$.]

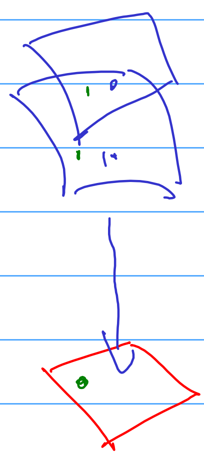
$\dim(X) =$ "# parámetros que necesito para describir a X módulo ambigüedad finita".

Teorema: Normalización de Noether

Si $S = \mathbb{C}[x_1, \dots x_n]/J$ existen $k \in \mathbb{N}$, $y_1, \dots, y_k \in S$ tales que:

(1) $\mathbb{C}[y_1, \dots y_k] \subseteq S$ ← isomorfo a un anillo de polinomios

(2) $S \supseteq \mathbb{C}[y_1 \dots y_k]$ es entera.

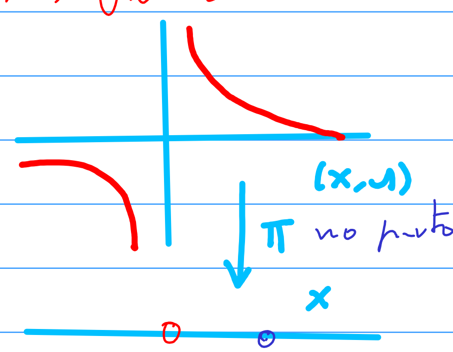


$$\begin{array}{ccc} V(J) & & (x_1, \dots x_n) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \text{ morfismo finito} \\ \mathbb{C}^k & & (y_1(x), \dots, y_k(x)) \end{array}$$

Ejemplo: $S = \mathbb{C}[x,y]/(xy-1)$

extensión no entera $\quad i \uparrow$

$R = \mathbb{C}[x]$



$$\left[\begin{cases} y = y + \lambda x \\ X = x \end{cases}\right] \quad (\lambda) = -1)$$

$xy - 1$

$X(y - \lambda X) - 1$

$= -\lambda X^2 + Xy - 1$

$$S = \mathbb{C}[X, Y] \big/ (X^2 + XY - 1)$$

entra $\uparrow$

$X^{89} + \ldots$

$$R = \mathbb{C}[Y]$$

$$p(Z) = 1 Z^2 + ZY - 1$$

Ejercicio: Utilice lo anterior para demostrar el Lema de Normalización de Noether.

Consecuencia: Toda variedad afín tiene dimensión finita. porque admite un morfismo finito

$$X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^k$$

$$\dim(X) = \dim(\mathbb{C}^k)$$

$$\dim(\mathbb{C}^k) \; ?$$

$$\mathbb{C}^k = \left[\mathbb{C}^k \supseteq \overset{\overset{\mathbb{C}^{k-1}}{\shortparallel}}{V(x_1)} \supseteq V(x_1, x_2) \supseteq \ldots \supseteq \overset{\overset{\{p\}}{\shortparallel}}{V(x_1 \ldots x_k)}\right]$$

$$\dim(\mathbb{C}^k) \geq k$$

$$\overbrace{\mathbb{C}^k \supseteq \boxed{Z_1} \supseteq Z_2 \supseteq \ldots \supseteq Z_k}$$

irreducible $\quad I(Z_1) = (h_1, \ldots h_n)$

$$Z_1 \subseteq \overset{\overset{\mathbb{C}^k}{\cup}}{V(h_1)} \xrightarrow[\forall]{\text{(ag un todo ejemplo)}} \dim(V(h_1)) \leq k-1$$

$$\Rightarrow \dim(Z_1) \leq k-1$$

luego $\dim(\mathbb{C}^k) \leq k. \Rightarrow \boxed{\dim(\mathbb{C}^k) = k}$

Lema: Si $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $h \neq 0$ entonces $\dim(V(h)) \leq n-1$.

Dem:
$$\begin{cases} X_1 = x_1 + \lambda_1 x_n \\ \vdots \\ X_{n-1} = x_{n-1} + \lambda_n x_n \\ X_n = x_n \end{cases} \qquad h = \sum c_\alpha x^\alpha$$

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$$

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = (X_1 - \lambda_1 X_n)^{\alpha_1} \cdots (X_{n-1} - \lambda_{n-1} X_n)^{\alpha_{n-1}} X_n^{\alpha_n}$$

$$= X_n^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_n^{\alpha_n} + \text{otros}(\,)$$

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \quad \left(X_n^M p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \dots \right)$$

Escojo $\lambda_i : p(\lambda) \neq 0$

$\cup$ es entera.

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$$

$$\dim(V(h)) = \dim(\mathbb{C}^{n-1}) \overset{\text{ind.}}{=} n-1$$

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ un cerrado.

$I(X)$ es homogéneo luego

$\underset{R}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{C}[X]}} = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] / I$ es un anillo graduado

$$HF_R(t) = \dim\left(\left(\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] / I \right)_t \right)$$

Teorema: [Hilbert] $\exists!_0\ p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que

$$\forall t \gg 0 \qquad p(t) = HF_R(t)$$

$$p(t) = a_n t^{n} + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots$$

Teorema: $\dim(X) = \operatorname{degree}(P_R(t))$

Ejemplo: $\mathbb{P}^n \rightsquigarrow \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] = R$

$$HF_R(t) = \begin{cases} \binom{n+t}{t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

grado n

$$\binom{n+t}{n} = \frac{(t+n)(t+n-1)\cdots(t+1)}{n!} = \frac{t^{n}}{n!} + O(t^{n-1})$$

$$P_R(t) = \frac{t^n}{n!} + O(t^{n-1})$$

$$\dim(\mathbb{P}^n) = n$$

Pregunta: Cuál es la dimensión de nuestros ejemplos?

$\nu_d(\mathbb{P}^m)$, $\sigma(\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \times \mathbb{P}^c \times \cdots \times)$,

$Gr(k, V)$