Hoy: X-rank y X-border-rank

Sea V un e.v. $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ y sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad algebraica

Si $[p] \in \mathbb{P}^n$, la presencia de X permite definir un concepto de "rango" para p.

$$X\text{-rank}([p]) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} \exists \; v_1, \dots, v_k \in V \setminus \{0\} \\ (1) \; [v_i] \in X \\ (2) \; [p] = [v_1 + \dots + v_k] \end{array} \right\}$$

$[v_1]$ $[v_2]$

$$= \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} \exists \; [v_1], \dots, [v_k] \in X \\ [p] \in \langle [v_1], \dots, [v_k] \rangle \subseteq \mathbb{P}^n \end{array} \right\}$$

Si $\underset{[v_i]}{p_i}, \dots, p_m \in \mathbb{P}^n$ $\langle p_1, \dots, p_m \rangle$ ← mínimo subespacio proyectivo de $\mathbb{P}^n$ que los contiene.

$\langle p_1, \dots, p_m \rangle = \{ [\sum \alpha_i \vec{v_i}] : \alpha_i \in \mathbb{C} \}$

$$\underbrace{X\text{-border rank}([p])}_{\text{geométrico}} = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} \exists \; [p_n] \in \mathbb{P}^n : \\ (1) \; \lim_{n \to \infty} p_n = p \\ (2) \; X\text{-rank}([p_n]) \leq k \end{array} \right\}$$

topología euclídea en V

Ejemplo: **(1)** Si $X = \sigma(\underset{\mathbb{P}(V_1)}{\mathbb{P}^a} \times \underset{\mathbb{P}(V_2)}{\mathbb{P}^b} \times \underset{\mathbb{P}(V_3)}{\mathbb{P}^c})$

$$= \{ [T] : \underset{\text{para } v_1, v_2, v_3 \in V_1 \times V_2 \times V_3}{T = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3} \}$$

X-rank$([T])$ = Tensor rank

X-border-rank$([T])$ = border rank.

(2) Si $X = \underset{\text{Veronese}}{\nu_d(\mathbb{P}(V))} \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d(V))$

X-rank$([p])$ = Waring-rank

X-border-rank(p) =

(3) $X = Gr(k, V) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ [w]

X-rank$([p])$

Def: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad irreducible y sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

Clausura de Zariski

$$\sigma_k(X) = \overline{\bigcup_{\substack{[x_1], \dots, [x_k] \\ \in X}} \underbrace{\langle [x_1], \dots, [x_k] \rangle}_{\left[\sum \lambda_i x_i\right]}}$$

$\sigma_k(X) \subseteq \mathbb{P}^n$

k-ésima variedad secante de X

Porque $\sigma_k(X)$ es irreducible. En Z irreducible, $U \subseteq Z$ es abierto de Zariski $\Rightarrow Z = \overline{U} = \overline{U}^{\text{euclídea}}$.

Obs: $\forall \; [p] \in \mathbb{P}^n$

X-border-rank$([p]) = \min \{ k \in \mathbb{N} : [p] \in \sigma_k(X) \}$

$\sigma_k(X) = \{ [p] : X\text{-border-rank}([p]) \leq k \}$.

Hechos:

(1) Si X irred $\Rightarrow \sigma_k(X)$ es irred $\forall k$

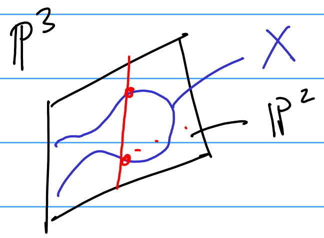
(2) Si X no está contenida en un espacio lineal

$\sigma_j(X) \subsetneq \mathbb{P}^n \Rightarrow \sigma_j(X) \subsetneq \sigma_{j+1}(X)$

Si X no está contenida en ningún subespacio lineal $\Rightarrow$

$X = \sigma_1(X) \subsetneq \sigma_2(X) \subsetneq \sigma_3(X) \subsetneq \dots \subsetneq \mathbb{P}^n$

Como la dimensión crece $\exists \; k^*$: $\sigma_{k^*}(X) = \mathbb{P}^n$.



Consecuencias:

(1) X-border-rank$([p]) \overset{?}{\leq} j$ se puede decidir mediante ecuaciones $\iff [p] \in \sigma_j(X)$

Cuáles son las ecuaciones de las variedades secantes de X?

$$\boxed{\mathcal{I}(\sigma_j(X)) = (g_1, \dots, g_p)}$$

(2) $\forall [p]$ X-border-rank$([p]) < \infty$ $\leq t$ más aún,

typical rank / $\mathbb{C}$

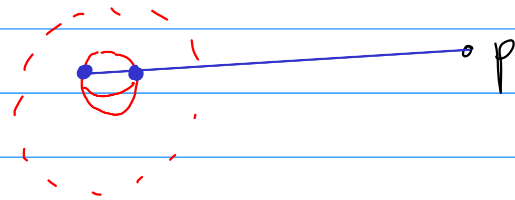
Existe un entero $t := \min\{k \in \mathbb{N} : \sigma_k(X) = \mathbb{P}^n\}$

$\exists\ \mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}^n$: $X\text{-rank}([p]) \le t \quad \forall p \in \mathcal{U}$

abierto de Zariski

$\mathcal{U}^c$ tiene interior $\emptyset$

Obs:



$$p = \lambda v_1 + \eta v_2$$

$$X\text{-rank}([p]) \le X\text{-rank}([v_1]) + X\text{-rank}([v_2]) \le 2t$$

Pregunta: Cómo encontrar $t = \min\{k \in \mathbb{N} . \ \sigma_k(X) = \mathbb{P}^n\}$?

Más generalmente, cuál es la dimensión de $\sigma_k(X)$?

cómo acotar $\dim(\sigma_k(X))$?

Ejemplo: $X = \{\text{Matrices de } m \times n \text{ de rango } 1\} \subseteq \mathbb{P}^{mn-1}$

$= \{[A] : A \in \mathbb{C}^{m\times n}, \ \mathrm{rank}(A) = 1\}$

$= \sigma(\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1}) =$

$([a_1 \dots a_m], [b_1 \dots b_n]) \longmapsto \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}$

$\sigma_2(X) = \{[\lambda A + \eta B] : [A],[B] \in X\} = \{[A] : A \text{ tiene rango} \le 2\}$ cerrado de Zariski

$[A] \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓ ✓

$\sigma_j(X) = \{[A] : \mathrm{rank}(A) \le j\}$

$t = \min(m,n)$, toda matriz puede escribirse como suma de $\le t$ matrices de rango 1 luego

$\sigma_t(X) = \mathbb{P}^{mn-1}$ ✓

$\sigma(\mathbb{P}^{n-1}\times\mathbb{P}^{m-1})$

$$\underbrace{X}_{n+m-2} = \sigma_1(X) \subseteq \underbrace{\sigma_2(X)}_{2(n+m-2)-1} \subseteq \underbrace{\sigma_3(X)}_{3(n+m-3)-1\ ?} \subseteq \dots \subseteq \mathbb{P}^{mn-1} = \sigma_{\min(m,n)}(X)$$

$n \leq m$

$n(\cancel{n}+m-\cancel{n})-1 = nm-1$

$\mathbb{P}^{n-1}\times\mathbb{P}^{m-1}$

$[\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}^{m-1} = \mathbb{C}^{n+m-2}]$

$$\begin{array}{ccc}
X_0 & Y_0 & X_0\times\mathbb{C}^{m-1} \\
\cup\!\! \mid & \cup\!\! \mid & \vdots \\
\vdots & \vdots & X_k\times\mathbb{C}^{m-1} \\
\cup\!\! \mid & \cup\!\! \mid & X_k\times Y_0 \\
X_k & Y_k & \vdots \\
 & & X_k\times Y_k
\end{array}$$

$$HF_{\sigma(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m)}(t) = \binom{n+t}{t}\binom{m+t}{t} = \frac{(t+n)\dots(t+1)}{n!}\,\frac{(t+m)\dots(t+1)}{m!} = \frac{t^n t^m}{n!m!} + \dots$$

$(1,1)$

$[x_0\dots x_n][y_0,\dots y_m] \longrightarrow [\overset{t}{x_0}\overset{t}{y_0},\dots x_n y_m]$

grado $n+m$ — $\dfrac{t^{n+m}}{n!m!}$

Cuál es la dimensión de las matrices de rango $\leq j$ en $\mathbb{P}^{nm-1}$?

$$\begin{array}{c|c}
 & \overbrace{\hspace{6em}}^{m} \\
n & \left[\ \underbrace{\cdots}_{j}\ \Big|\ u_1 \ \cdots\ u_{m-j}\ \right]
\end{array}$$

especificamos j constantes por cada uno de los u_i

$j\cdot n$

supongo que tiene rango completo

$j=1$

$$j(m-j) + j\cdot n - 1$$

$$[j(n+m-j)-1]$$

Ejercicio: $\dim(X) = \dim(\overline{X})$ en espacios top. siempre.

Ejercicio: Sea $X = \{ [A] : \operatorname{rank}(A) \leq 1 \} \subseteq \mathbb{P}^{mn-1}$, $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$Z = \sigma_j(A)$. Demuestre:

(1) $Z = \{ [A] : \operatorname{rank}(A) \leq j \}$

(2) Demuestre que Z es irreducible y $\dim(Z) = j(n+m-j) - 1$, $j \leq \min(m,n)$