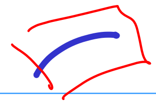


Hoy: (1) PROBLEMA: $\dim(\sigma_j(X)) = ?$

$X$ irreducible $\quad X \subseteq \mathbb{P}^n$

$X = \sigma_1(X) \subsetneq \sigma_2(X) \subsetneq \sigma_3(X) \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_t(X) = \mathbb{P}^n$

$X$-border rank $([p]) = \min\{j \in \mathbb{N} : [p] \in \sigma_j(X)\}$.

**Teorema:** (1) $\forall j \in \mathbb{N}$ $\sigma_j(X)$ es una variedad irreducible

(2) $\dim(\sigma_j(X)) \leq j(\dim X) + (j-1)$ ← dimensión esperada

(3) Si $\dim(\sigma_j(X)) = j(\dim X) + (j-1)$ entonces $\exists\, \underset{\substack{\text{abierto}\\ \text{no vacío}}}{U \subseteq} \sigma_j(X)$ en el que todo elemento puede escribirse como suma de $\leq j$ puntos de $X$ de solo finitas maneras.

(4) Si $\dim(\sigma_j(X)) < j(\dim X) + (j-1) \Rightarrow \exists\, U \subseteq \sigma_j(X)$ en el que todo elemento se puede escribir de infinitas maneras

$$\sigma_j(X) = \bigcup_{p_1,\dots,p_j \in X} \underbrace{\langle p_1, \dots, p_j \rangle}_{\text{plano proyectivo de dim } j-1} \supseteq U$$

**Ejemplo:** $X = \mathrm{Segre}(\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \times \mathbb{P}^c) \subseteq \mathbb{P}^{(a+1)(b+1)(c+1)-1}$

$\dim(X) = a+b+c$

(*) [Supongamos que $\dim(\sigma_j(X))$ es la dimensión esperada $= j(a+b+c) + j - 1$]

Cuánto vale $t$?

$$j(a+b+c) + j - \cancel{1} \geq (a+1)(b+1)(c+1) - \cancel{1}$$

$\sigma_j(X) = \mathbb{P}^N$ $\quad j \geq \left\lceil \dfrac{(a+1)(b+1)(c+1)}{a+b+c+1} \right\rceil$

Se seguiría que $\exists\, U \subseteq \mathbb{P}^{(a+1)(b+1)(c+1)-1}$ tal que $\forall p \in U$ tiene rango

$\leq \left\lceil \dfrac{(a+1)(b+1)(c+1)}{a+b+c+1} \right\rceil \overset{a=b=c}{=} \dfrac{(a+1)^3}{3a+1} \sim a^2$

Ejercicio: Si $Y$ es irreducible y $U \subseteq Y$ es abierto

(i) $U$ es denso $\iff U \neq \emptyset$.

(ii) $U_1, U_2$ abiertos no vacíos $\Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

(2) Prerrequisitos: Dimensión de fibras.

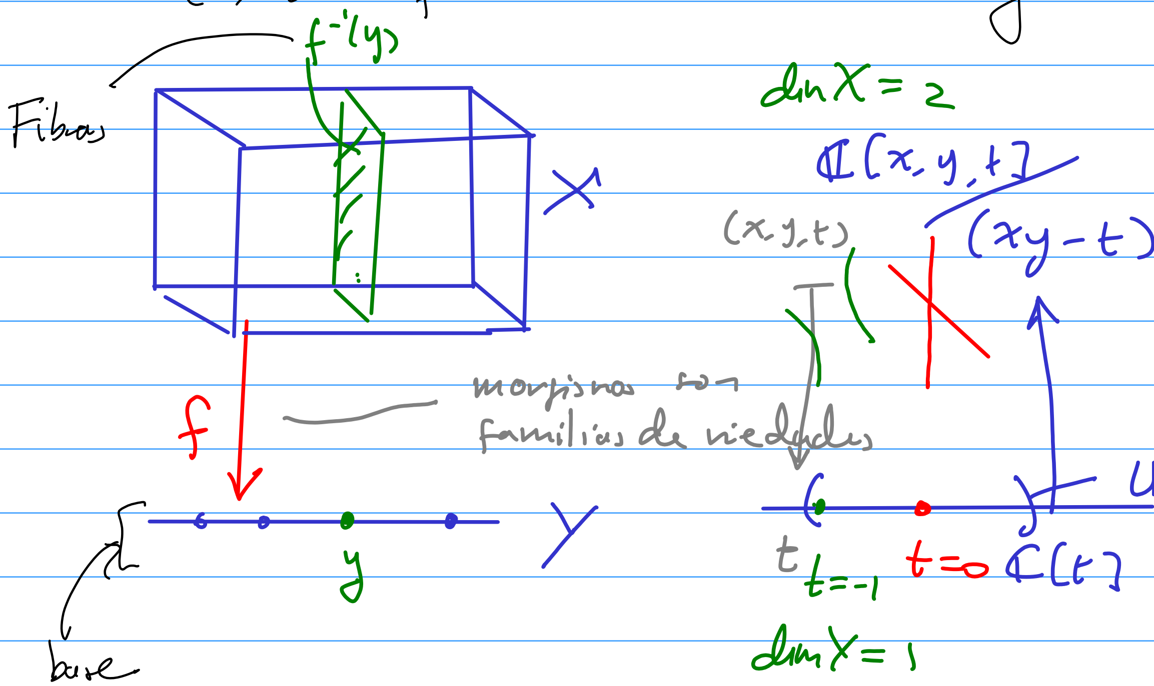
La herramienta más útil para entender y calcular dimensiones de variedades algebraicas.

**Teorema:** [dimensión de fibras_ Notas de R. Vakil]

Asuma que $X, Y$ son variedades irreducibles y $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo dominante. $\exists\, U \subseteq Y$ abierto no vacío tal que $\forall u \in U$:

(i) $f^{-1}(u)$ es equidimensional (i.e. las componentes irreducibles tienen la misma dimensión)

(ii) $\dim(f^{-1}(u)) = \dim X - \dim Y$.



Ejemplo

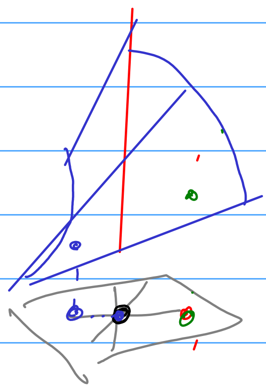
$$\{((a,b),[s:t]) : \det\begin{pmatrix} a & b \\ s & t\end{pmatrix} = 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} Z \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 & & ((a,b),[s:t]) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \mathbb{C}^2 & & (a,b) \end{array}$$

singletons

Si $(a,b) \neq (0,0) \Rightarrow \pi^{-1}((a,b)) = \{((a,b),[(a,b)])\}$

Si $(a,b) = (0,0) \Rightarrow \pi^{-1}((0,0)) = \{(0,0) \times \mathbb{P}^1\}$



$$Z = Bl_{(0,0)}(\mathbb{C}^2)$$

$\forall X:$

$X \times \mathbb{P}^n$

$\downarrow \pi_1$

$X$

propio.

En la top euclidea:
Si $K \subseteq Y$ es compacto
$f^{-1}(K)$ es compacto

**Teorema 2:** Suponga que $f: X \to Y$ es un "proper morphism"

(1) Si $Y$ es irreducible y todas las fibras son irreducibles y de dimensión constante $\Rightarrow X$ es irreducible.

(2) $y \in Y \rightsquigarrow \varphi(y) = \dim(f^{-1}(y)) \in \mathbb{N}$

$\varphi$ es upper-semicontinuous.

$\{y \in Y : \varphi(y) \geq j\}$ es cerrado de Zariski.

Si $y_n \to y \Rightarrow \varphi(y) \geq \varphi(y_n)$

$d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots$

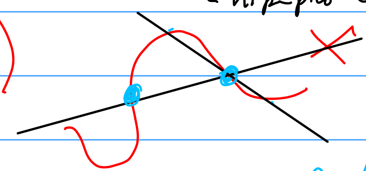
$U' = \{ y \in Y : \varphi(y) = d_1 \}$ es abierto $\subseteq Y$

$U' \cap U \neq \emptyset$ con $U$ del Teorema anterior

$\Rightarrow d_1 = \dim X - \dim Y$

Queremos estimar $\dim(\sigma_k(X))$, asumiendo $X$ irreducible. [$X$ no contenida en ningún hiperplano en $\mathbb{P}^n$]

$$\sigma_k(X) = \overline{\left( \bigcup_{p_1,\dots,p_k \in X} \langle p_1 \dots p_k \rangle \right)}$$



$$\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{k\text{-puntos}} \supseteq U \xrightarrow[\text{morfismo}]{\psi} Gr(k,V)$$

(1) $\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{k\text{-puntos}} \overset{\psi}{\dashrightarrow} Gr(k-1, \mathbb{P}^n) = Gr(k, V)$

$([p_1], \dots, [p_k]) \longmapsto [p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k] \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$

Variety of secant k-planes: $\sigma_k(X) := \left[ \overline{\mathrm{im}(\psi)} \right] \subseteq Gr(k-1, \mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$

$\mathrm{im}(\psi) = \psi(U)$

Ejercicio: (1) Si $X, Y$ irred $\Rightarrow X \times Y$ irred.

(2) Si $X$ irred y $U \subseteq X$ es abierto no vacío $\Rightarrow U$ irred.

(3) Si $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo y $X$ irred $\Rightarrow f(X)$ es irred.

(4) Si $Z \subseteq X$ irred $\Rightarrow \overline{Z}$ irred.

$$\dim(\sigma_k(X)) \overset{*}{\leq} \dim(U) = \dim(\overbrace{X \times \dots \times X}^{k\text{-veces}}) = k \dim X.$$

$X \xrightarrow{f} \mathrm{im}(f) \subseteq \overline{\mathrm{im}(f)} = Y$

$\dim X - \dim Y = \dim(f^{-1}(u)) \geq 0$

$\dim X \geq \dim Y$

$$X \times X \xrightarrow{\pi_1} X$$

$\dim(X \times X) = \dim(X) + \underbrace{\dim(\pi_1^{-1}(u))}_{= \dim X}$

Queremos usar $\mathcal{S}_k(X) \subseteq Gr(k-1, \mathbb{P}^n)$

para formar $\sigma_k(X)$.

$$
\begin{tikzcd}
Gr(k-1,\mathbb{P}^n)\times\mathbb{P}^n \supseteq \mathcal{U} = \{([w],[v]) : \overset{v\wedge w = 0}{v \in L_w}\} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & \mathbb{P}^n \\
\mathcal{S}_k(X) \subseteq Gr(k-1,\mathbb{P}^n) &
\end{tikzcd}
$$

$v \in L_w$

$$\pi_1^{-1}(\mathcal{S}_k(X)) = \{([w],[v])\} =: Z$$

generados por k puntos de $X$ y sus límites

$$\pi_1^{-1}([w_0]) = \{([w_0],[v]) : v \in L_{w_0}\} = [w_0] \times L_{w_0}$$

$$\boxed{\pi_2(Z) \overset{?}{=} \sigma_k(X)}$$

$$W := \pi_2(Z) = \pi_2(\pi_1^{-1}(\mathcal{S}_k(X)))$$

**Af:** $W$ es irreducible,

$\dim(W) \leq k(\dim X) + (k-1)$.

irred.

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1^{-1}(\mathcal{S}_k(X)) \arrow[d, "\pi_1 \text{ proper}"] & \mathcal{U} \arrow[d, "\pi_1 \text{ proper}"] \\
\mathcal{S}_k(X) \subseteq & Gr(k-1,\mathbb{P}^n)
\end{tikzcd}
$$

$\Delta_k(X)$ es irreducible

$$\pi_1^{-1}([w_0]) = [w_0] \times L_{w_0} \cong \mathbb{P}^{k-1}$$

por Teo de base y fibra

$Z = \pi_1^{-1}(\Delta_k(X))$ irred y $\dim(\pi_1^{-1}(\Delta_k(X))) =$

$= \dim(\Delta_k(X)) + k - 1$

$\leq k(\dim X) + (k-1)$ ✓

$\Rightarrow W = \pi_2(Z)$ es irred

y $\dim(W) \leq \dim(Z) = k(\dim X) + (k-1)$