Hoy: Ejemplos de variedades algebraicas clave en tensores

Ejemplos: Las siguientes son variedades algebraicas

(1) $\left\{ [T] : \begin{array}{l} T \in \mathrm{Sym}^d(V) \\ \text{con } \underbrace{\text{rango de Waring}} = 1 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d(V))$

Variedad de Veronese

$\nu_d(\mathbb{P}(V)) \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d(V))$

$F \in \mathrm{Sym}^d(V)$ $\quad \mathrm{rango}_\omega(F) \leq m \iff$

existen m $v_1, \dots, v_m \in V$:

$F = (v_1^d) + \dots + v_m^d$

(2) $\left\{ [T] : \begin{array}{l} T \in V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k \\ \mathrm{Rango}(T) = 1 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k)$

$T = v_1 \otimes \dots \otimes v_k$

Variedad de Segre

(3) $\left\{ [T] : \begin{array}{l} T \in \Lambda^k V \\ T \text{ totalmente descomponible} \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$

$T = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ para algunos $v_i \in V$

Grassmaniana (k, V)

"Subespacios vectoriales k-dim'l de V"

$Gr(k, V)$
$\parallel$
$Gr(k-1, \mathbb{P}(V))$

Queremos describir $\underline{\mathcal{I}(X)}$, $\left[R_X := \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] / \mathcal{I}(X) \right]$

$\left[\begin{array}{l} HF(j) := \dim_{\mathbb{C}}(R_j) \\ HF: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \text{Función de Hilbert} \end{array} \right] \longleftarrow !$

$R_X = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$

E.V. $/\mathbb{C}$

Ej: Si $X = \mathbb{P}^n$,

$R_X = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$

$\begin{array}{c} \overbrace{}^{n+1} \\ n+1 \left\{ \left[\right] \right. \end{array}$

$R_X = \underbrace{\langle 1 \rangle}_{R_0} \oplus \underbrace{\langle x_0, \dots, x_n \rangle}_{R_1} \oplus \underbrace{\langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, \dots, x_n^2 \rangle}_{R_2} \oplus \underbrace{\langle x_0^3, \dots \rangle}_{R_3} \oplus \dots$

$$\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} + n+1 = (n+1)\left[\frac{n}{2}\right] + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

j	0	1	2	3	4	5
$HF(j)$	1	$n+1$	$\binom{n+2}{2}$	$\binom{n+3}{3}$	$\dots$	

$$\left[HF(j) = \binom{n+j}{n}\right] \quad \text{para } R_X$$

$$\frac{j^{n}}{n!} + \dots$$

polinomio de grado n ?? tamaño de $\mathbb{P}^n$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $I=(F)$ $F \neq 0$ polinomio homogéneo de grado e en $\mathbb{C}[x_0,\dots,x_n]$, sea $R := \mathbb{C}[x]/I$

(a) Calcule $HF(j) =$

(b) Verifique que $HF(j)$ coincide con un polinomio de grado $(n-1)$ para $j \gg 0$

$$\left(\exists A : \; HF(j) = A j^{n-1} + O(j^{n}) \quad \forall j \gg 0\right)$$

X ||

(1) $\{[v^d] : v \in V\} \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d(V))$ son una variedad algebraica.

Defina $V \xrightarrow{\;\mu^d\;} \mathrm{Sym}^d(V)$

$v \longmapsto v^d$

mostraremos que esta función desciende a un morfismo

$\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\;\nu_d\;} \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d(V))$ con $X = \nu_d(\mathbb{P}(V))$

d-uple embedding ó
d-th Veronese map

Escribiendo el mapa en coordenadas

Concretamente, $V = \langle e_1, e_2 \rangle$ $d=3$

$$\mathrm{Sym}^3(V) = \langle \underbrace{e_1^3,\ e_1^2 e_2,\ e_1 e_2^2,\ e_2^3}\rangle$$

$V \xrightarrow{\;(\;)^d\;} (\mathrm{Sym}^3(V))$

$ae_1 + be_2 \longmapsto (ae_1+be_2)^3$

$\mathrm{Sym}^3(V) \ni \longleftarrow [a^3 e_1^3 + 3a^2 b\, e_1^2 e_2 + 3ab^2 e_1 e_2^2 + b^3 e_2^3]$

Qué es "toma coordenadas?"

Def: Un sistema de coordenadas en un e.v. W

es un conjunto minimal de funciones $g_j : W \longrightarrow \mathbb{C}$ cuyos valores determinan todo punto $w \in W$ de manera única. * [Si: Fija una base $\mathcal{B}$ de W y toma $\mathcal{B}^*$ coordenadas de coordenadas]

Ejemplo: Considera $(1,2,3) \in [\mathbb{R}^3] \leftarrow \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$.

En $\mathbb{R}^3$ hay coordenadas
$$x : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$z : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
dual de e_1, e_2, e_3.

q el punto con $x(q)=1$, $y(q)=2$, $z(q)=3$

Una manera de coordinatizar $Sym^3(V)$ es con la dual de $\langle e_1^3, e_1^2 e_2, e_1 e_2^2, e_2^3 \rangle$.

Con esas coordenadas

$$\nu_d(a e_1 + b e_2) = (a^3, 3a^2 b, 3ab^2, b^3) \in Sym^3(V)$$
$$[a^3 : 3a^2 b : 3ab^2 : b^3] \in \mathbb{P}(Sym^3 V)$$

Ejercicio.

Si $V = \langle e_1, \dots e_n \rangle$ y $V^* = \langle \overbrace{x_1, \dots, x_n}^{\text{base dual}} \rangle$

$$Sym^d(V)^* \xleftarrow[\text{canónica}]{\text{identificación}} Sym^d(V^*) = \langle x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} : a_1 + \cdots + a_n = d \rangle$$

(a) Demuestra que bajo

$$x^\alpha : Sym^d(V) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x^\alpha(e_\beta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{\binom{d}{\alpha}}, & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

(b) Prueba que en esas coordenadas

$$\nu_d : V \longrightarrow Sym^d(V)$$
$$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \text{monomios de grado} \\ d \text{ en } a_1, \dots, a_n \end{pmatrix}$$

"generaliza $(a,b) \longmapsto (a^3, a^2 b, ab^2, b^3)$"

$$V \longrightarrow \mathrm{Sym}^d(V)$$

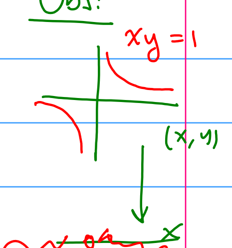
$$(a_1,\dots,a_n) \longmapsto (\underbrace{a_1^d, \dots, a_n^d}_{\text{monomios de grado } d \text{ en } a_1,\dots,a_n})$$

Observe que los polinomios $a_1^d,\dots,a_n^d$ no tienen ceros comunes excepto $a_1=a_2=\dots=a_n=0$, y son homogéneos de un mismo grado. Concluimos que

$$\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d(V))$$
$$[a_1:\dots:a_n] \longmapsto [a_1^d:\dots:a_n^d]$$

es un morfismo

Obs:



$\pi(V(xy-1))$ NO ES cerrado

Hecho: Si $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ son reducidas y $\varphi: X \to Y$ es morfismo entonces φ es cerrado (i.e. envía $Z \subseteq X$ cerrado de Zariski en $\varphi(Z) \subseteq Y$ cerrado de Zariski).

Luego $X := \nu_d(\mathbb{P}(V))$ es un subconjunto algebraico de $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d(V))$.

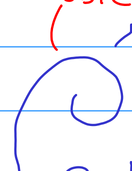
- Qué ecuaciones definen a X?
- Cómo es el anillo R_X?

Ejemplo: $V = \langle e_1, e_2 \rangle$, $d=3$ $\qquad \langle e_1^3, e_1^2e_2, e_1e_2^2, e_2^3 \rangle$

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^3 V) = \mathbb{P}^3$$

$$[s:t] \longmapsto [\underset{y_{(3,0)}}{s^3} : \underset{y_{(2,1)}}{s^2t} : \underset{y_{(1,2)}}{st^2} : \underset{y_{(0,3)}}{t^3}]$$

Twisted cubic in $\mathbb{P}^3$



$\subseteq \mathbb{P}^3$

Qué ecuaciones satisfacen?

$$s^3t^3 - (s^2t)(st^2)$$

$$\begin{pmatrix} y_{(3,0)}y_{(0,3)} - y_{(2,1)}y_{(1,2)}, \\ y_{(0,3)}y_{(2,1)} - y_{(1,2)}^2, \\ y_{(3,0)}y_{(1,2)} - y_{(2,1)}^2 \end{pmatrix} \subseteq I(X)$$

Cómo demostrar la igualdad?