Ejemplos de variedades (tensores de "rango" 1)

$V = \langle e_1, e_2 \rangle \qquad d=3 \qquad Sym^3(V) = \langle e_1^3, e_1^2 e_2, e_1 e_2^2, e_2^3 \rangle$

$$\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(Sym^3(V))$$
$$[v] \longmapsto [v^3]$$

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\nu_3} \mathbb{P}^3$$
$$[s:t] \longrightarrow [s^3 : s^2 t : s t^2 : t^3]$$

$y_{(3,0)} \quad y_{(2,1)} \quad y_{(1,2)} \quad y_{(0,3)}$

Twisted cubic curve in $\mathbb{P}^3$

$X = \nu_3(\mathbb{P}^1)$. Cómo es $\mathcal{I}(X)$?

Más generalmente:

$V = \langle e_1, e_2 \rangle$

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}(Sym^d(V)) = \mathbb{P}^d$$
$$[s:t] \longrightarrow [s^d : s^{d-1}t : \dots : t^d]$$

$y_{(d,0)} \quad y_{(0,d)}$

$X = \nu_d(\mathbb{P}^1)$ Rational normal curve in $\mathbb{P}^d$

Cómo es $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathbb{C}[\{y_{(a,b)} : a+b=d\}] = \mathbb{C}[\vec{y}]$

Lema: $\mathcal{I}(X) = (\mathcal{I}(X)_2)$

$$\mathcal{I}(X) = (\{y_{(a,b)} \cdot y_{(c,d)} - y_{(e,f)} y_{(g,h)} : (a,b)+(c,d) = (e,f)+(g,h)\})$$

Binomios cuadráticos

Idea: Sea $J = (\{y_{(a,b)} y_{(c,d)} - y_{(e,f)} y_{(g,h)} : (a,b)+(c,d)=(e,f)+(g,h)\})$

(1) Mostramos que $J \subseteq \mathcal{I}(X)$ ✓

(2) De acá se sigue que $J_e \subseteq \mathcal{I}(X)_e \subseteq \mathbb{C}[\vec{y}]_e$

y son por lo tanto e.v. de dim $< \infty$.

$$J_e = \mathcal{I}(X)_e \iff \boxed{\dim_{\mathbb{C}}(J_e) \geq \dim(\mathcal{I}(X)_e)}$$

intentemos prob- esto

Equivalentemente mostremos que $\to R_X$

$$\forall e \geq 0 \quad \left[\underbrace{\dim\left(\left(\mathbb{C}[\vec{y}]/J\right)_e\right)}_{\text{Combinatoria con los generadores}} \le^{**} \underbrace{\dim\left(\left(\mathbb{C}[y]/\mathcal{I}(x)\right)_e\right)}_{\text{Teoría nos permite una fórmula } N(e)} \right]$$

Basta verificar que el cociente tiene $N(e)$ generadores como e.v.

$\nexists\; a', b' : a'+b'=3,\ a'\le a,\ b'\le b$

$(a,b) : a+b = k\cdot 3$

Queremos entender $HF_{R_X}(e) \overset{?}{=}$

$s^6,\ s^5t,\ s^4t^2, \dots, t^6$

$y_{(3,0)}^2,\ y_{(3,0)}y_{(2,1)}, \dots$

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\nu_3} \mathbb{P}^3$$

$$[s:t] \longmapsto ([s^3 : s^2t : st^2 : t^3])$$

$$\underbrace{y_{(3,0)},\ y_{(2,1)},\ y_{(1,2)},\ y_{(0,3)}}_{e}$$

$$p = y_{(3,0)}^2 - y_{(1,2)}^2 + y_{(3,0)}y_{(2,1)} \in \mathbb{C}[\vec{y}]_2$$

$$\nu_3^*(p) = (s^3)^2 - (st^2)^2 + s^3s^2t$$
$$= s^6 - s^2t^4 + s^5t \in \mathbb{C}[s,t]_6$$

$$\mathbb{C}[y]_e \xrightarrow[\text{lineal}]{\nu_3^*} \twoheadrightarrow \mathbb{C}[s,t]_{3e} \quad ✓$$

$$\left[\operatorname{Ker}(\nu_3^*) = \mathcal{I}(X)_e\right] \leftarrow \text{por def de ideal de } X$$

$$\left(\mathbb{C}[y]/\mathcal{I}(x)\right)_e \xrightarrow[\text{isomorfismo!}]{\nu_3^*} \mathbb{C}[s,t]_{3e}$$

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\left(\mathbb{C}[y]/\mathcal{I}(x)\right)_e\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[s,t]\right)_{3e} = 3e+1$$

Hemos demostrado que

$$HF_{R_X}(e) = 3e+1 \quad \text{si} \quad X = \nu_3(\mathbb{P}^1)$$

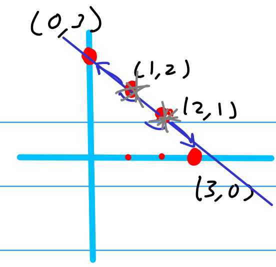
Más generalmente

$$HF_{R_X}(e) = d\cdot e^{1}+1, \quad \text{si } e \geq 0$$
$$\text{si} \quad X = \nu_d(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^n$$

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$[s:t] \longmapsto [s^3 : s^2t : st^2 : t^3]$$

$$y_{(3,0)} \quad y_{(2,1)} \quad y_{(1,2)} \quad y_{(0,3)}$$



$$y_{(1,2)}\, y_{(2,1)} = y_{(3,0)}\, y_{(0,3)}$$

Observe que: Si $b \geq 1$ y $c \geq 1$

$$y_{(a,b)}\, y_{(c,d)} - y_{(a+1,b-1)}\, y_{(c-1,d+1)} \in J$$

en $\mathbb{C}[\vec{y}]/J$ $\quad y_{(a,b)}\, y_{(c,d)} = y_{(a+1,b-1)}\, y_{(c-1,d+1)}$

Qué polinomios cuadráticos necesito para generar ✓ $\left(\mathbb{C}[\vec{y}]/J\right)_2$

$\{y_{(a,b)} : a+b=3\}$ $\quad \mathbb{C}[y_{(3,0)}, \dots, y_{(0,3)}]$ $\quad \binom{3+2}{2} = 10$

$y_{(3,0)}\, y_{(0,3)}$ $\quad$ $\cancel{y_{(2,1)}}\, y_{(1,2)}$

$y_{(3,0)}\, y_{(2,1)}$ $\quad$ $y_{(3,0)}^2$, $\cancel{y_{(1,2)}^2}$, $\cancel{y_{(2,1)}^2}$, $y_{(0,3)}^2$

$y_{(3,0)}\, y_{(1,2)}$

7 ✓

$y_{(0,3)}\, y_{(2,1)}$

$y_{(0,3)}\, y_{(1,2)}$

$$y_{(1,2)}\, y_{(1,2)} = y_{(2,1)}\, y_{(0,3)}$$

Productos de 3: $\quad a+b=3,\ c+d=3,\ e+f=3$

$y_{(a,b)}\, y_{(c,d)}\, y_{(e,f)}$ $\quad$ Si cualquier pareja es "interior"

reducimos

$$y_{(3,0)}^{a'}\, y_{(f,g)}\, y_{(0,3)}^{b'}$$

Lema: Todo monomio en $y_{(a,b)}$: $a+b=d$ de grado k es igual en $\mathbb{C}[y]/J$ a uno de la forma

$$y_{(d,0)}^{a'}\, y_{(f,g)}^{\varepsilon}\, y_{(0,d)}^{b'}$$

donde $\varepsilon \in \{0,1\}$ $a', b' \in \mathbb{N}$

y $a' + \varepsilon + b' = k$.

luego estos monios generan $\left(\mathbb{C}[y]/J\right)_k$

Cuántos de estos hay?

$\varepsilon = 0$

$$y_{(d,0)}^{a'} \, y_{(0,d)}^{b'} \; : \; a' + b' = k \qquad k+1$$

$\varepsilon = 1$

$$y_{(d,0)}^{a'} \, \underbrace{y_{(f,g)}} \, y_{(0,d)}^{b'} \; : \; a' + b' + 1 = k \qquad (d-1) \cdot k$$

$$k+1 + k(d-1) = kd + 1 = HF_{R_X}(k)$$

Concluimos que siguiendo la Idea.

$J = \mathcal{I}(X)$ ✓

* **Ejercicio:** Generalizar todo lo anterior, es decir

$V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ $d \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d(V)) \qquad [v] \longmapsto [v^d]$$

$$\mathbb{P}^{n-1} \xrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}^{\binom{d+n-1}{d}-1}$$

$$[a_1 : \dots : a_n] \longrightarrow [\text{Monomios de grado } d \text{ en } a_1, \dots, a_n]$$

$X := \nu_d(\mathbb{P}^{n-1})$ ← Variedad de Veronese d-ésima de $\mathbb{P}^{n-1}$

(1) Demuestre que $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathbb{C}\left[\{y_{\vec{\alpha}} : \sum_{i=1}^n \alpha_i = d\}\right]$

es $\mathcal{I}(X) = \left(\{ y_{\vec{\alpha}_1} y_{\vec{\alpha}_2} - y_{\vec{\beta}_1} y_{\vec{\beta}_2} : \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \} \right)$

ecuaciones cuadráticas binomiales

(2) Demuestre que $X \cong \mathbb{P}^{n-1}$

[Usen el hecho que si $f: X \to Y$ es función y $f|_{U_i}$ es morfismo para $U_i \subseteq X$ abiertos $\Rightarrow f$ es morfismo]

$$\mathbb{P}^{n-1} \xrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d(V)) = \mathbb{P}^{\binom{n-1+d}{d}-1}$$

Si L es una forma lineal

$L \circ \nu_d$ es un polinomio de grado d en $\mathbb{P}^{n-1}$.

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\nu_3} \mathbb{P}^3$$

$$[s:t] \longmapsto [s^3 : s^2t : st^2 : t^3]$$

$$A \quad B \quad C \quad D$$

$$L = aA + bB + cC + dD$$

$$L \circ \nu_3 = as^3 + bs^2t + cst^2 + dt^3$$

$$\underbrace{\{\text{Propiedades de } V(L) \cap X\}} \rightsquigarrow \{\text{Propiedades de polinomios, } \cancel{\text{de}}\ V(L \circ \nu) \text{ grado } d \text{ en } \mathbb{P}^{n-1}\}$$

$V(L)$ es hiperplano

más fácil. Esta propiedad de linealización es una de las razones por las que $\nu_d(\mathbb{P}^{n-1})$ es una variedad muy útil.