Qué es un tensor? Dos respuestas

V espacio vectorial $=$ V espacio vectorial $/\mathbb{C}$
$\dim(V) < \infty$

Construcción: Sean $V_1, \dots, V_m$ espacios vectoriales de dimensiones $d_1, \dots, d_m$. Queremos construir:

(1) Un espacio vectorial $[V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_m]$

(2) Una función multilineal

$$\otimes : V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_m$$

que satisfaga la siguiente propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \dots \times V_m \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\forall\, T \text{ multilineal}"'] & V_1 \otimes \dots \otimes V_m \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \varphi \text{ LINEAL}"] \\
\forall\, W \text{ espacio vectorial} &
\end{tikzcd}$$

"Toda transformación multilineal

$T : V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_m$

es $\varphi \circ \otimes = T$ ← Clasifica transformaciones multilineales.

para una única φ lineal"

Construcción:

(1) Escoja bases de $V_1, \dots, V_m$

para $V_i \rightsquigarrow \{ v_j^{(i)} : 1 \leq j \leq \dim(V_i) =: d_i \}$

(2) Defina $V_1 \otimes \dots \otimes V_m = \left\langle \underbrace{v_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes v_{i_m}^{(m)}}_{\text{símbolos}} : \begin{array}{l} 1 \leq i_1 \leq d_1 \\ 1 \leq i_2 \leq d_2 \\ \vdots \\ 1 \leq i_m \leq d_m \end{array} \right\rangle$

e.v. generado por ...

$\dim(V_1 \otimes \dots \otimes V_m) = d_1 d_2 \dots d_m$

(3) Defina

$$\otimes : V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_m$$

$$\otimes\left(\sum_{i_1=1}^{d_1} b_{i_1}^{(1)} v_{i_1}^{(1)}, \dots, \sum_{i_m=1}^{d_m} b_{i_m}^{(m)} v_{i_m}^{(m)} \right) := \sum_{i_1=1}^{d_1} \sum_{i_2=1}^{d_2} \dots \sum_{i_m=1}^{d_m} b_{i_1}^{(1)} \dots b_{i_m}^{(m)} \left[v_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes v_{i_m}^{(m)} \right]$$

$\otimes$ es multilineal.

Prop. universal:

Sea W un ev cualquiera

$T : V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow W$ multilineal

$$* \quad T\left(\sum_{i_1=1}^{d_1} b_{i_1}^{(1)} v_{i_1}^{(1)}, \dots, \sum_{i_m=1}^{d_m} b_{i_m}^{(m)} v_{i_m}^{(m)} \right) = \sum_{i_1=1}^{d_1} \sum_{i_2=1}^{d_2} \dots \sum_{i_m=1}^{d_m} b_{i_1}^{(1)} \dots b_{i_m}^{(m)} T\left(v_{i_1}^{(1)}, \dots, v_{i_m}^{(m)} \right)$$

Queremos: $T = \varphi \circ \otimes$, ¿cómo definir φ?

$$T(v^{(1)}_{j_1},\dots,v^{(m)}_{j_m}) = \varphi \circ \otimes (v^{(1)}_{j_1},\dots,v^{(m)}_{j_m})$$
$$= \varphi(\underbrace{v^{(1)}_{j_1}\otimes\cdots\otimes v^{(m)}_{j_m}}_{\text{base de } V_1\otimes\cdots\otimes V_m})$$

φ TIENE que ser así; si existe φ, esta debe ser única.

Existencia: Definir $\varphi : V_1\otimes\cdots\otimes V_m \to W$ como LA transformación lineal que manda

$$\left[\varphi(v^{(1)}_{i_1}\otimes\cdots\otimes v^{(m)}_{i_m}) = T(v^{(1)}_{i_1},\dots,v^{(m)}_{i_m})\right]$$

por (*) $\left[T = \varphi\circ\otimes\right]$

Pregunta: Si escogemos OTRA BASE para $V_1,\dots,V_m$ ¿obtendríamos OTRO producto tensorial?

Lema (Unicidad del producto tensorial)
Si $(V_1\otimes\cdots\otimes V_m, \otimes)$ y (Λ, g) son "productos tensoriales" de $V_1,\dots,V_m$ (es decir satisfacen la prop universal) entonces $\exists!$ φ isomorfismo de ev con $g = \varphi\circ\otimes$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \dots \times V_m \arrow[r, "g", "\text{multilineal}"'] \arrow[d, "g = T"', "\text{multil}"] & \Lambda \\
W \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \varphi \text{ LINEAL}"']
\end{tikzcd}$$

$$\varphi \circ g = g \Rightarrow \varphi = id.$$

Dem:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \dots \times V_m \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "g"'] & V_1 \otimes \dots \otimes V_m \arrow[dl, bend left, "\exists!\, \varphi"'] \\
\Lambda \arrow[ur, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \varphi \circ \otimes = g & \varphi \text{ lineal} \\ \delta \circ g = \otimes & \delta \text{ lineal} \end{cases}$$

$$(\delta \circ \varphi) \circ \otimes = \delta \circ g = \otimes \Rightarrow \delta \circ \varphi = id_{V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_m}$$

$$(\varphi \circ \delta) \circ g = \varphi \circ \otimes = g \Rightarrow \varphi \circ \delta = id_{\Lambda}$$

$u \otimes v \in V_1 \otimes V_2 \quad u \in V_1,\ v \in V_2$

$V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$

Def: Un tensor es un elemento de un producto tensorial de espacios vectoriales.

NOTACIÓN: Si $f_1 \in V_1, \dots, f_m \in V_m$
$[\otimes(f_1, \dots, f_m) =: f_1 \otimes \dots \otimes f_m]$

Ejemplo:

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \qquad \langle a_1, a_2 \rangle \quad \langle b_1, b_2 \rangle$$

$$\otimes : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

$$\langle a_1 \otimes b_1,\ a_1 \otimes b_2,\ a_2 \otimes b_1,\ a_2 \otimes b_2 \rangle$$

$$(1,1) \otimes (1,2)$$

$$[a_1 + a_2 \otimes b_1 + 2b_2] \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

$$\parallel$$

$$a_1 \otimes b_1 + 2b_2 + a_2 \otimes b_1 + 2b_2$$

$$\parallel$$

$$[a_1 \otimes b_1 + 2a_1 \otimes b_2 + a_2 \otimes b_1 + 2a_2 \otimes b_2] \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

$$\parallel$$

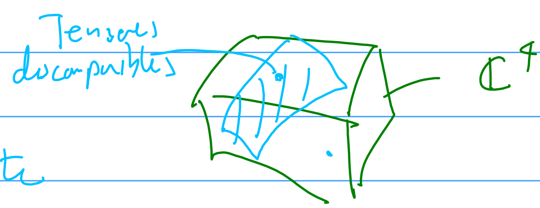
$$(1, 2, 1, 2)$$

Def: $T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_m$ es "Totalmente descomponible" (ó de rango uno) si $T \in \operatorname{im}(\otimes)$.

Ejercicio:

(1) Demuestre que hay tensores en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ que NO son totalmente descomponibles

(2) Caracterice los tensores totalmente descomponibles en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$ ← como ev



Encuentre qué ecuaciones satisfacen los coeficientes de los tensores descomponibles.

Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$

Def: Un tensor de formato $a \times b \times c$ es un cubo de números T_{ijk} con $1 \le i \le a$, $1 \le j \le b$, $1 \le k \le c$

Sean $A = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_a \rangle$, $B = \langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_b \rangle$, $C = \langle \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_c \rangle$

$$T \in A \otimes B \otimes C = \sum_{i,j,k} T_{ijk} [a_i \otimes b_j \otimes c_k]$$

Ejemplo: Sean X, Y, Z variables aleatorias discretas

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \begin{matrix} \in [a] := \{1, 2, \dots a\} \\ \in [b] := \{1, \dots b\} \\ \in [c] := \{1, \dots c\} \end{matrix}$$

$$\underbrace{T_{ijk}} := \mathbb{P}\{X = i, Y = j, Z = k\}$$

$1 \leq i \leq a$
$1 \leq j \leq b$
$1 \leq k \leq c$

La distribución conjunta de X, Y, Z es un tensor de formato $a \times b \times c$

Pregunta: Cuando es T_{ijk} descomponible?

R: Caso de v.a. $\Leftrightarrow$ independientes.

$*$

Si X, Y, Z son independientes

$$\underset{T_{ijk}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\{X = i, Y = j, Z = k\}}} = \underbrace{\mathbb{P}\{X = i\}}_{p_i^X} \mathbb{P}\{Y = j\} \mathbb{P}\{Z = k\}$$

$$p_i^X \cdot p_j^Y \cdot p_k^Z$$

$$T = \sum_{i,j,k} T_{ijk} (a_i \otimes b_j \otimes c_k) = \sum_{i,j,k} p_i^X p_j^Y p_k^Z (a_i \otimes b_j \otimes c_k)$$

$$\underbrace{\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{a} p_i^X a_i}_{\hat{A}}\Big) \otimes \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{b} p_j^Y b_j}_{\in B}\Big) \otimes \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{c} p_k^Z c_k}_{\in C}\Big)}_{\text{Tensor completamente descomponible.}}$$

Ejercicio: Es $*$ verdadero?