Hoy: Ejemplos de tensores

Ejemplo 1: Las matrices $^{m\times n}$ son tensores de formato $m\times n$.

Notación: Si U, V son espacios vectoriales definimos

$$V^* = \{ \ell : V \longrightarrow \mathbb{C} \text{ lineales} \} \quad V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$$

$$\mathrm{Hom}(\underset{n}{U}, \underset{m}{V}) = \{ T : U \longrightarrow V,\ T \text{ lineal} \}$$

Lema: Hay un isomorfismo canónico (i.e. que puede describirse sin utilizar bases)

$$\underbrace{U^* \otimes V} \xrightarrow[\substack{\text{lineal}\\ \text{invertible}}]{\varphi} \mathrm{Hom}(U, V)$$

Obs: Si fijamos bases $u_1, u_2, \dots, u_n$ de U
$v_1, v_2, \dots, v_m$ de V — B_V

esto determina un isomorfismo no canónico

$$\mathrm{Hom}(U,V) \xrightarrow{\psi_{B_U, B_V}} \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{m\times n}$$

$$T$$

$$\begin{array}{c|c}
 & u_1 \quad u_2 \quad \cdot\, u_j \quad u_n \\
\begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{array} & \begin{bmatrix} & & | & \\ & & [T(u_j)]_{B_V} & \\ & & | & \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$T(u_j) \in V$$
$$= b_{1j} \vec{v}_1 + b_{2j} \vec{v}_2 + \dots + b_{mj} \vec{v}_m$$

Dem: Queremos $U^* \otimes V \xrightarrow{\text{lineal}} \mathrm{Hom}(U, V)$. Usamos prop. univ.

$$\begin{tikzcd}
U^* \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "T"', "\text{bilineal}"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & U^* \otimes V \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \varphi \text{ LINEAL}"] \\
\mathrm{Hom}(U, V) &
\end{tikzcd}$$

$$T: \mathcal{U}^* \times V \longrightarrow Hom(\mathcal{U}, V)$$
$$(\vec{\alpha}, \vec{b}) \longmapsto (u \longmapsto \alpha(u)\cdot\vec{b})$$

observe que: ✓(i) $T(\alpha, \vec{b}) \in Hom(\mathcal{U}, V)$

✓(ii) T es multilineal.

$$\forall u \left[\begin{array}{l} T(\vec{\alpha}_1 + \lambda\vec{\alpha}_2, \vec{b})(u) = (\alpha_1 + \lambda\alpha_2)(u)\,\vec{b} = \\ = \alpha_1(u) b + \lambda\,\alpha_2(u) b = T(\alpha_1, b)(u) + \lambda\, T(\alpha_2, b)(u) \end{array} \right]$$

$$T(\alpha_1 + \lambda\alpha_2, b) = T(\alpha_1, b) + \lambda\, T(\alpha_2, b)$$

y lo mismo sucede en la segunda componente

$$T(\alpha_1, b_1 + \lambda b_2) = T(\alpha_1, b_1) + \lambda T(\alpha_1, b_2)$$

φ cumple:

(1) Es lineal ✓

(2) $\varphi(\alpha \otimes b) = T(\alpha, b) = (u \mapsto \alpha(u) b)$

Para probar que φ es isomorfismo mostremos que es sobreyectiva. Vamos a intentar entender cómo se ven las transformaciones lineales de la forma $\underset{Hom(\mathcal{U},V)}{\underset{\cap}{\varphi(\alpha \otimes b)}}$ para entender, probemos con bases

$$\mathcal{U} = \langle u_1, .., u_n \rangle$$
$$V = \langle v_1, .., v_m \rangle$$
$$\mathcal{U}^* = \langle \alpha_1, .., \alpha_n \rangle, \quad \{\alpha_i\} \text{ base dual de los } \{u_i\}$$
$$\alpha_j(u_t) = \delta_{jt} \text{ — Kronecker.}$$

$$\varphi(\alpha_j \otimes v_t) \in Hom(\mathcal{U}, V) \qquad [\varphi(\alpha_j \otimes v_t)(u) = \alpha_j(u)\, \vec{v}_t]$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_j & u_n \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_t \\ v_m \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 0 & & & 0 & \\ 0 & & & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & 0 & \\ & & & 0 & \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{cases} 1 \text{ en fila } t \text{ col } j \\ 0 \text{ d.l.c.} \end{cases}$$

Como $Im(\varphi)$ contiene a una base de $Hom(\mathcal{U}, V)$ φ es sobre

Luego φ es isomorfismo porque $U^*\otimes V$ y $\mathrm{Hom}(U,V)$ tienen la misma dimensión $m\cdot n$.

Ejemplo:

$$\left[\mathrm{Hom}(U,V)\quad \begin{array}{c|cc} & u_1 & u_2 \\ \hline v_1 & 1 & 3 \\ v_2 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \quad U^*\otimes V: \quad \alpha_1\otimes v_1 + 3\alpha_2\otimes v_1 + 4\alpha_1\otimes v_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \longleftarrow \quad T = \underline{\alpha_1 + 2\alpha_2} \otimes \underline{v_1 - 5v_2}$$

Pregunta: ¿A qué $\mathrm{Hom}(U,V)$ corresponden los tensores totalmente descomponibles?

Si $T\in \mathrm{Hom}(U,V)$

$\mathrm{rango}(T) := \dim(\mathrm{im}(T))$

Ejercicio: En clase 1: Encontr. ecuaciones para tensores desc. en $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$

*Generalizado: Encuentre ecuaciones para los tensores desc en $U^*\otimes V$

Lema: Los tensores descomponibles en $U^*\otimes V$ corresponden con las t. lineales de rango ≤ 1 en $\mathrm{Hom}(U,V)$.

Dem: Sea $\alpha\in U^*$, $b\in V$

$\forall u\in U\ \left((\alpha\otimes b)(u) = \alpha(u)\vec{b} \subseteq \langle \vec{b}\rangle\right)$ luego $\mathrm{im}(\alpha\otimes b)\subseteq\langle\vec{b}\rangle$

$\dim(\mathrm{im}(\alpha\otimes b))\leq 1$. Recíprocamente si $T: U\longrightarrow V$ tiene rango 1, $T\neq 0$

$\mathrm{im}(T) = \langle\vec{b}\rangle$, $\forall u\in U\quad T(u) = [\alpha(u)]\vec{b}$

con α lineal porque T es lineal

$T = \alpha\otimes b$.

$U = \langle u_1,\dots,u_n\rangle$

$T(u_i) = c_i\vec{b}$

Defina α como $\alpha: U\to\mathbb{C}$

$\alpha(u_i) = c_i$

$\forall u\left(T(u) = \alpha(u)\vec{b}\right)$

Teorema:

$$\mathrm{Hom}(U,V) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U^*\otimes V$$

$\{T\in \mathrm{Hom}(U,V)$ con $\dim(\mathrm{im}(T))\leq k\}$

$\{T\in U^*\otimes V$ que son suma de $\leq k$ descomponibles$\}$

Ejercicio: (a) Demuestre el Teorema

(b) Demuestre que $\forall k$ $\{T : R(T)\leq k\}$ es cerrado en $U^*\otimes V$ la topología inducida por una norma.

El lado derecho del Teorema anterior sugiere la siguiente definición clave:

Sean $V_1, \dots, V_m$ espacios vectoriales

Def: $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ es descomponible si
$T \in \mathrm{im}(\otimes)$ con $\otimes : V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$
$\exists\ v^{(i)} \in V_i \quad 1 \leq i \leq m$ con $T = v^{(1)} \otimes \cdots \otimes v^{(m)}$.

Def: Un tensor $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$

$$\underbrace{R(T)}_{\substack{\text{rango del} \\ \text{tensor } T}} = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists\ T_1, \dots, T_n \text{ DESCOMPONIBLES con } T = T_1 + \cdots + T_n \right\}$$

(tensor rank)

Ejemplo: El tensor de multiplicación de matrices

$$\begin{tikzcd} U^m \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & V^n \arrow[d, "g"] \\ & W^p \end{tikzcd}$$

$B = \mathrm{Hom}(U, V)$
$A = \mathrm{Hom}(V, W)$
$C = \mathrm{Hom}(U, W)$

Considere la función:

$$M : A \times B \longrightarrow C$$
$$(g, f) \longmapsto g \circ f$$

Note que M es bi-lineal ✓, luego por la propiedad universal

$\hat{M} : A \otimes B \longrightarrow C$ lineal $\quad \hat{M} \in \mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$

$$\hat{M} \in A^* \otimes B^* \otimes C = (A \otimes B)^* \otimes C$$

??

Tensor de multiplicación de matrices.

Ejercicio: Demostrar que

(a) $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$ (c) $(U \otimes V)^* = U^* \otimes V^*$

(b) $U \otimes V \cong V \otimes U$

<u>Pregunta</u>: Encuentre $R(M_{(m,n,p)})$

Caso especial $R(M_{\langle n,n,n\rangle})$, se conoce sólo para $n=2$

$[n=3$ ABIERTO!$]$

$A_{ij} \sim A^i_j$

$$\boxed{\hat{M}\left(\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a^1_1 b^1_1 + a^1_2 b^2_1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} c^1_1 & c^1_2 \\ c^2_1 & c^2_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\hat{M}\,\in}{\mathrm{Hom}(A\otimes B, C)} \xrightarrow{\varphi} [A^*\otimes B^*\otimes C] \ni \varphi(\hat{M})$$

<u>Tarea</u>: Resolver

(Strassen 1969)

$$
\begin{aligned}
M_{2,2,2} = {} & (a^1_1 + a^2_2) \otimes (b^1_1 + b^2_2) \otimes (c^1_1 + c^2_2) \; + \\
& (a^2_1 + a^2_2) \otimes b^1_1 \otimes (c^2_1 - c^2_2) \; + \\
& a^1 \otimes (b^1_2 - b^2_2) \otimes (c^1_2 + c^2_2) \; + \\
& a^2_2 \otimes (-b^1_1 + b^2_1) \otimes (c^2_1 + c^1_1) \; + \\
& (a^1_1 + a^1_2) \otimes b^2_2 \otimes (-c^1_1 + c^1_2) \; + \\
& (-a^1_1 + a^2_1) \otimes (b^1_1 + b^1_2) \otimes c^2_2 \; + \\
& (a^1_2 - a^2_2) \otimes (b^2_1 + b^2_2) \otimes c^1_1
\end{aligned}
$$