Hoy: (1) Espacios $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ como representaciones

Ejemplo: $A \otimes B \leftarrow$ órbitas (finitas)

(2) Tensores Simétricos y alternantes.

(1) Producto tensorial de representaciones

Suponga que (A, ρ_A) es una rep de G_A

(B, ρ_B) es una rep de G_B.

Vamos a transformar a $A \otimes B$ en una representación de $G := G_A \times G_B$. es decir definir

$$\rho_{A\otimes B} : G \xrightarrow[\text{grupos}]{\text{hom de } \checkmark} GL(A \otimes B)$$

$$(g_A, g_B) \longmapsto \left[T_{(g_A, g_B)} : A \otimes B \longrightarrow A \otimes B \ \text{invertible} \right]$$

Construcción $\quad T_{(g_A, g_B)}(\vec{a} \otimes \vec{b}) = g_A(\vec{a}) \otimes g_B(\vec{b})$

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[d, "f"', "\text{bilineal}"] & & A \otimes B \arrow[dll, "\text{LINEAL}"', "\exists!\, T_{(g_A, g_B)} =: \rho_{A\otimes B}((g_A, g_B))"] \\
A \otimes B & &
\end{tikzcd}$$

$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto g_A(\vec{a}) \otimes g_B(\vec{b})$

Ejercicio: Fije bases $\mathcal{B}_A = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_A\}$ de A

$\mathcal{B}_B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_B\}$ de B

$\mathcal{B}_C = (\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j)$ de $A \otimes B$

¿Cómo es $[T_{(g_A, g_B)}]_C$ en términos de $[g_A]_{B_A}$ y $[g_B]_{B_B}$?

Ejemplo: Recuerde que U es una rep de $GL(U)$ de manera natural

$$\rho : GL(U) \xrightarrow{id} GL(U).$$

De acá se sigue que

$\underbrace{V_1 \otimes V_2 \otimes .. \otimes V_k}$ es una rep de $G := \prod_{i=1}^{k} GL(V_i)$

$\vec{g} \in G$
$\quad = (g_1, \ldots, g_k)$ con

$$\rho(\vec{g})\left(u_1 \otimes u_2 \otimes .. \otimes u_k\right) = g_1(u_1) \otimes g_2(u_2) \otimes .. \otimes g_k(u_k)$$

$\boxed{\text{Lema:}}$ El rango de tensores $T \in V_1 \otimes .. \otimes V_k$ es invariante por G (i.e. $\forall T \left(R(T) = R(\rho(g)(T)) \right)$ $\forall g \in G$)

(Razón: La acción es lineal y el conjunto de tensores descomponibles es G-invariante)

* **Pregunta:** Describa las órbitas bajo la acción de G en $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ $\left(V_1 \otimes .. \otimes V_k / G \right)$.

"2-tensores":

Sean A, B espacios vectoriales. Describimos las órbitas de $GL(A) \times GL(B)$ en $A \otimes B$

Notación: Fije $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_A$ base de A
$\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_B$ base de B

Para $j \in \{0, .., \min(A,B)\}$ defina

$$\left[T_j = \sum_{i=1}^{j} \vec{a}_i \otimes \vec{b}_i \right]$$

Teorema: La acción de G tiene finitas órbitas en $A \otimes B$. Más precisamente

$$\left[R(S) = j \iff \exists\, \vec{g} \in G : S = \rho(\vec{g})(T_j) \right]$$

y $R(T_j) = j$ ✓.

Dem: Sea $S \in A \otimes B$ un tensor de rango j

$$S = \sum_{i=1}^{j} \vec{u}_i \otimes \vec{v}_i \quad , \quad u_i \in A \; , \; b_i \in B$$

por dem de José Miguel ...

$\{u_1, \dots, u_j\}$ son lin. indep en A

$\{v_1, \dots, v_j\}$ son lin indep en B

$j \leq \min(\dim(A), \dim(B))$

Completamos los u's y b's a bases de A y B

y defino $\vec{g} = (g_A, g_B) \in GL(A) \times GL(B)$

$$\begin{cases} g_A(u_i) = a_i & \forall i \\ g_B(v_i) = b_i & \forall i \end{cases}$$

$$\rho(\vec{g})(S) = \sum_{i=1}^{j} \rho(\vec{g})(u_i \otimes v_i) = T_j$$

$$\boxed{S = \rho(\vec{g}^{-1})(T_j)}$$

$$T_j \in A \otimes B \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Hom}(A^*, B)$$

base dual de a_i

$$[\varphi(T_j)] = \begin{array}{c|c} & \{a_1^* \; a_2^* \; \dots \; a_A^*\} \\ \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix} \end{array} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$T_j = \sum_{i=1}^{j} a_i \otimes b_j$$

$$a_i \otimes b_j (a_s^*) = a_s^*(a_i)\, b_j$$

órbitas de matrices módulo escogencia de bases en A^* y B

Obs: Si A es una rep de G

B es una rep de G

$A \otimes A \to \operatorname{Hom}(A^*, A)$ ...

$A \otimes B$ es una rep de $G \times G$

$$G_g \xrightarrow{i} G \times G \xrightarrow{\rho_{A \otimes B}} GL(A \otimes B)$$

(g, g) --→ $A \otimes B$ como rep de G

Pregunta: órbitas de $GL(A)$ en $A \otimes A$?

ODECO tensors : Elina Robeva, Dustin Cartwright, Bernd Sturmfels.
eigenvalues of tensors

(2) Tensores simétricos y alternantes.

Def: Sea V un espacio vectorial $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ y sea $k \in \mathbb{N}$.

$\mathrm{Sym}^k(V) =$ "Polinomios homogéneos de grado k en las variables $e_1, \dots, e_n$"

Ej: $\dim(\mathrm{Sym}^k(V)) = \binom{n+k-1}{k}$

$$\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k \text{ copias}} \xrightarrow{\psi} \mathrm{Sym}^k(V)$$

$$(v_1, \dots, v_k) \longmapsto \Big[\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^n c_i^{(1)} e_i\Big)}_{v_1} \cdot \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^n c_i^{(2)} e_i\Big)}_{v_2} \cdot \dots \cdot \underbrace{\Big(\quad \Big)}_{v_k} \Big]$$

Obs: ψ es k-lineal y simétrico:
$$\Big[\psi(v_1, \dots, v_k) = \psi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \quad \forall \sigma \in S_k \Big]$$

Lema: $(\mathrm{Sym}^k(V), \psi)$ satisface la siguiente propiedad universal:

$$\begin{tikzcd}
\overbrace{V \times V \times \dots \times V}^{k\text{-copias}} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "T"'] & \mathrm{Sym}^k(V) \arrow[dl, "\exists!\,\varphi \text{ LINEAL}"] \\
W &
\end{tikzcd}$$

T k-lineal $\boxed{\text{simétrica}}$

$\forall$ e.v. W $\forall T$ k-lineal simétrica $\exists!\ \varphi$ LINEAL: $\varphi \circ \psi = T$

$\varphi(v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k) = T(v_1, \dots, v_k)$

Más aún, esta propiedad universal determina $(\mathrm{Sym}^k(V), \psi)$ de manera única módulo isomorfismo.

Ejercicio: (a) Demuestre el lema

(b) $V = \langle e_1, e_2 \rangle$. Calcule $\mathrm{Sym}^3(V)$.

(c)

$\mathrm{Sym}^k(V)$ puede pensarse naturalmente como una colección de tensores

$$\mathrm{Sym}^k(V) \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{k\text{-veces}}.$$

así:

$$\begin{tikzcd} \overbrace{V \times V \times \cdots \times V}^{k\text{-copias}} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "T"', "\substack{k\text{-lineal}\\ \text{simétrica}}"] & \mathrm{Sym}^k(V) \arrow[dl, "\varphi"] \\ \underbrace{V \otimes V \otimes V \otimes V \cdots \otimes V}_{k\text{-veces}} & \end{tikzcd}$$

$$\varphi(v_1 \cdot v_2 \cdots v_k) = T(v_1, \dots, v_k)$$

$$\boxed{T(v_1, v_2, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}}$$

Af: T es k-lineal (porque es suma de k-lineales)

T es simétrico (i.e. $\forall \tau \in S_k$ $T(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) = T(v_1, \dots, v_k)$)

$$T(v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, \dots, v_{\tau(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(\tau(1))} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(\tau(k))}$$

$$\{\sigma\tau : \sigma \in S_k\} = S_k$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\delta \in S_k} v_{\delta(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\delta(k)} = T(v_1, \dots, v_k)$$

$\delta = \sigma\tau$

S_k es grupo

Ejemplo: $V = \langle x, y\rangle$

$Sym^3(V) \ni \underline{xy^2 + x^3}$

$Sym^3(V) \subseteq V\otimes V\otimes V$ $\quad \varphi(xy^2+x^3) = \varphi(xy^2)+\varphi(x^3)$

$$\varphi(xy^2) = T(x,y,y) = \frac{1}{6}\Big(\overset{123}{x\otimes y\otimes y} + \overset{132}{x\otimes y\otimes y}$$

$$+ \overset{213}{y\otimes x\otimes y} + \overset{231}{y\otimes y\otimes x}$$

$$+ \overset{312}{y\otimes x\otimes y} + y\otimes y\otimes x \Big)$$

123
132
213
231
312
321

$$= \frac{1}{6}\left(2x\otimes y\otimes y + 2y\otimes x\otimes y + 2y\otimes y\otimes x\right) \in V\otimes V\otimes V$$

Tensor simétrico

$$T = \frac{1}{3}\left(x\otimes y\otimes y + y\otimes x\otimes y + y\otimes y\otimes x\right)$$

$$y\otimes x\otimes y + x\otimes y\otimes y + y\otimes y\otimes x$$

S_k actúa en $\underbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}_{k\text{-copias}}$

$$Sym^k(V) \subseteq V\otimes\cdots\otimes V$$

$$\| \quad \{T \in V\otimes\cdots\otimes V : \sigma\circ T = T \;\; \forall \sigma\in S_k\}$$

$\boxed{\text{Lema:}}$ S_k actúa sobre $\overbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}^{k\text{ veces}}$ permutando componentes. $\rho: S_k \longrightarrow GL(V\otimes\cdots\otimes V)$

$\sigma \longmapsto \rho(\sigma)$ en notación $\sigma\circ$

$$\{T\in V\otimes\cdots\otimes V : \sigma\cdot T = \sigma \;\; \forall\sigma\in S_k\}$$

$$\| \; im(\varphi)$$

$$Sym^k(V) \xrightarrow{\varphi} \subseteq V\otimes\cdots\otimes V$$