Hoy: Tensores Simétricos y alternantes:

(1) T. Simétricos

$V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, $k \in \mathbb{N}$

$Sym^k(V) =: S^k V :=$ "Polinomios homogéneos de grado k en $e_1, \dots, e_n$"

$$\psi : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-veces}} \xrightarrow[\text{SIMÉTRICO}]{\psi\text{ - } k\text{-lineal}} Sym^k(V)$$

$$(v_1, \dots, v_k) \longmapsto \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{(j)} e_i \right)$$

$(Sym^k(V), \psi)$

$$\begin{tikzcd} \overbrace{V \times \dots \times V}^{k\text{-veces}} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "T\ k\text{-lineal SIMÉTRICO}"'] & Sym^k(V) \arrow[dl, "\exists!\,\varphi\ \text{LINEAL}"] \\ W & \end{tikzcd}$$

$\forall W$
$\forall T$

$$\boxed{\varphi(v_1 \cdots v_k) = T(v_1, \dots, v_k)}$$

Def: El grupo de permutaciones S_k actúa linealmente sobre $\underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-veces}} =: V^{\otimes k}$

$\sigma \in S_k$ $\qquad \rho(\sigma) : V^{\otimes k} \xrightarrow{\text{lineal}} V^{\otimes k}$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k \longmapsto v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

$$\rho(\sigma)(T) =: \sigma \cdot T$$

$(V^{\otimes k}, \rho)$ es una rep de S_k

Def: $T \in V^{\otimes k}$ es un tensor simétrico si $\forall \sigma \in S_k$ $\quad \boxed{\sigma \cdot T = T}$.

Def: $T \in V^{\otimes k}$ es un tensor alternante si $\forall \sigma \in S_k$ $\quad \boxed{\sigma \cdot T = \text{sgn}(\sigma)\, T}$

$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ par} \\ -1, & \sigma \text{ impar} \end{cases}$

Cómo caracterizar tensores simétricos y alternantes?

"$\mathrm{Sym}^k V$ es el espacio de tensores simétricos en $V^{\otimes k}$"

Teorema:

(1) Hay una inclusión $i : \mathrm{Sym}^k(V) \longrightarrow V^{\otimes k}$ ✓

(2) Hay una sobreyección $q : V^{\otimes k} \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(V)$ con $q \circ i = id_{\mathrm{Sym}^k(V)}$

(3) $\left[im(i) = \{ T \in V^{\otimes k} : \sigma . T = T \} \right]$

Dem:

(1)
$$\begin{tikzcd}
\overbrace{V \times V \times \cdots \times V}^{k} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathrm{Sym}^k(V) \arrow[dl, "\exists!\, i \ \text{LINEAL}"] \\
V^{\otimes k} &
\end{tikzcd}$$

$(v_1, \ldots, v_k)$

T k-lineal SIMÉTRICO

$$i(v_1 \cdots v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

$$T(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

Note que T es $\underbrace{\text{k-lineal}}_{\substack{\text{suma de} \\ \text{ops k-lineales}}}$ y $\underbrace{\text{simétrico}}_{\text{"truco de ponderar"}}$.

(2)
$$\begin{tikzcd}
\overbrace{V \times V \times \cdots \times V}^{k\text{-veces}} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\text{k-lineal } \mu"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V^{\otimes k} \arrow[dl, "\exists!\, q \ \text{Lineal}"] \\
\mathrm{Sym}^k(V) &
\end{tikzcd}$$

$$q(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_1 \cdots v_k$$

Note que $im(q) \supseteq \left\{ e_1^{a_1} \cdots e_n^{a_n} : \begin{array}{l} a_i \in \mathbb{N} \\ a_1 + \cdots + a_n = k \end{array} \right\}$

$$e_1^{a_1} \cdots e_n^{a_n} = q\Big(\underbrace{e_1 \otimes e_1 \otimes \cdots \otimes e_1}_{a_1} \otimes \underbrace{e_2 \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_2}_{a_2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{e_n \otimes \cdots \otimes e_n}_{a_n} \Big)$$

luego q es sobre!

Af: $q \circ i = id_{Sym^k(V)}$ ✓ porque es cierto en descomponibles de $Sym^k(V)$

Sean $v_1, \dots v_k \in V$

$$i(v_1 \cdots v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

$$q(i(v_1 \cdot \ldots \cdot v_k)) \underset{q \text{ lineal}}{=} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} q(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)})$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \cdot v_{\sigma(2)} \cdots v_{\sigma(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_1 \cdots v_k$$

$= v_1 \cdots v_k$, en particular i es 1-1

$$i(\alpha) = i(\beta) \Rightarrow \underbrace{q(i(\alpha))}_{\alpha} = \underbrace{q(i(\beta))}_{\beta}$$

(3)

Af: Hay una única función lineal $\pi : V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes k}$ que en descomponibles satisface

Proyección sobre la imagen

$$\boxed{\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}}$$

Más aún:

(1) Si T es simétrico entonces $\pi(T) = T$

(2) $im(\pi) = \{T \in V^{\otimes k} : \sigma \cdot T = T\}$

$$V^{\otimes k} \supseteq im(\pi) \cong Sym^k(V) \xleftarrow{\eta} V \times \cdots V$$

$\eta(v_1, \dots v_k) = \pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$

Dem:

$$\begin{tikzcd} \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k\text{-lineal}} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\psi"'] & V^{\otimes k} \arrow[dl, "\exists! \pi \text{ LINEAL}"] \\ V^{\otimes k} & \end{tikzcd}$$

$$\psi: (v_1, \dots v_k) \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} \quad k\text{-lineal (simétrico)}$$

#

$$\left[\pi = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \cdot \right]$$

(1)

Si T es simétrico $\sigma \cdot T = T$

$$\pi(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \cdot T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T = \underset{im(\pi)}{T}$$

Así que $im(\pi) \supseteq \{T \in V^{\otimes k} : \sigma \cdot T = T\}$

Si $\tau \in S_k$ $\quad \tau \cdot (\pi(T))$

$$\tau \cdot \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \cdot T \right) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \overbrace{(\tau \cdot \sigma)}^{\text{recorre } S_k} (T) = \pi(T)$$

luego

$$im(\pi) \subseteq \underbrace{\{ T \in V^{\otimes k} : \sigma \cdot T = T \}}$$

Para concluir note que

$$\pi(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = i(v_1 \cdot \dots \cdot v_k)$$

luego $\quad im(\pi) = im(i)$

luego $\quad im(i) = \{ T \in V^{\otimes k} : \sigma \cdot T = T \}$

Def: $F \in Sym^k(V)$ es descomponible si $F = v^k$ para algún $v \in V$ (F es potencia de una forma lineal).

Si $F \in Sym^k(V)$ el rango de Waring de F

$$R_\omega(F) = \min \{ n \in \mathbb{N} : \exists \ v_1, \dots, v_n : F = v_1^k + \dots + v_n^k \}$$

Ejercicio: Si $F \in Sym^k(V)$, $\dim(V) = n$ $\Rightarrow R_\omega(F) \leq \binom{k+n-1}{k}$

Obs: Sabemos que $Sym^k(V) \overset{i}{\hookrightarrow} V^{\otimes k}$

$$i(v_1^k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_1 = \underbrace{v_1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_1}$$

descomponible en $V \otimes \dots \otimes V$

sencillo

$$\boxed{R_\omega(F) \geq R(i(F))}$$

Dem: Si $F = \sum_{j=1}^{w} v_j^k \qquad w = R_\omega(F)$

aplicamos i (lineal)

$$\underbrace{i(F)}_{\text{tensor simétrico}} = \sum_{j=1}^{w} i(v_i^{\otimes k}) = \sum_{j=1}^{w} v_i \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_i$$

es $i(F)$ como suma de descomponibles

$w \geq R(i(F))$.

[Comon]

Conjetura: Si T es simétrico entonces

$$\underbrace{R(i^{-1}(T))}_{w} = R(T)$$

"Rango simétrico de T"

Paper: Conjetura falsa . . .

Shitov — "A counterexample to Comon's conjecture".

Paper: Chiantini, Hauenstein, Ikenmeyer, Landsberg, Ottaviani

→ "Polynomials and the exponent of matrix multiplication."

Ejercicio: 2.5.2.1 [L1]

$tr(ABC)$ ~ "Producto de mat"

$tr(A^3)$ ~ polinomio cúbico.

Ejercicio: 2.6.6.3 [L1]

"partial polarization" sirve para cotas inferiores para rango de Waring

(2) Tensores alternantes.

Lema: Existe ! función lineal $\Pi_{sgn} : V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes k}$

$$\Pi_{sgn}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)\left[v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}\right]$$

Más aún:

(1) Si T es alternante $\Pi_{sgn}(T) = T$

(2) $im(\Pi_{sgn}) = \{ T \in V^{\otimes k} : \sigma \cdot T = sgn(\sigma) T \}$.

Ejercicio: Demuestre el Lema

Def: $\Lambda^k V := im(\Pi_{sgn}) \subseteq V^{\otimes k}$

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k\text{-veces}} \xrightarrow{\quad \wedge \quad} \Lambda^k(V)$$

$$(v_1, \dots, v_k) \longmapsto \Pi_{sgn}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$$

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k := \Pi_{sgn}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$$

Lema:

(1) $\wedge$ es k-lineal y alternante

(2) $(\Lambda^k V, \wedge)$ satisface la siguiente propiedad universal

$T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma) T(v_1, \dots, v_k)$

$\wedge(v_1, \dots, v_k) =: v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ notación

$$\begin{tikzcd} V \times \cdots \times V \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d] & \Lambda^k V \arrow[dl, "! \varphi \text{ Lineal}"] \\ W & \end{tikzcd}$$

$\forall T$ k-lineal y ALTERNANTE

$\forall W$

Ej: Verifique el Lema anterior

Lema: (1) Demuestre que $\Lambda^k V$ tiene una base

$\{e_{i_1}\wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1\le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n\}$

luego $\dim(\Lambda^k V) = \binom{n}{k}$

(2) Escriba $\underset{\Lambda^k V}{\underset{\Uparrow}{v_1 \wedge \dots \wedge v_k}} = \sum_{\substack{I\subseteq [n]\\ |I|=k}} c_I \, e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$ ← det. $\in \Lambda^k V$

(3) $v_1\wedge \dots \wedge v_k = 0 \iff$ los $\{v_1,\dots,v_k\}$ son ln dep en V.

Ejercicio: Demuestre el Lema.

Ejercicio: [L1] (2.6.10) – (2.6.12)

Lema:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[\text{lineal}]{T} & U \\ \vdots & & \\ \Lambda^k V & \xrightarrow{\Lambda^k T} & \Lambda^k U \end{array}$$

funtor

Ejercicio: