

Hoy: Tensores Simétricos y alternantes:

(1) T. Simétricos

$$V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle, \quad k \in \mathbb{N}$$

$\text{Sym}^k(V) =: S^k V :=$  "Polinomios homogéneos de grado  $k$  en  $e_1, \dots, e_n$ "

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-veces}} \xrightarrow{\substack{\eta\text{-}k\text{-lineal} \\ \text{SIMÉTRICO}}} \text{Sym}^k(V)$$

$$(v_1, \dots, v_k) \longmapsto \prod_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n c_i^{(j)} e_i \right) \quad (\text{Sym}^k(V), \eta)$$

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-veces}} \xrightarrow{\eta} \text{Sym}^k(V)$$

$\forall W$   
 $\forall T$

$$\begin{array}{ccc} & T \text{ } k\text{-lineal} \\ & \text{SIMÉTRICO} \\ & \# \\ & \downarrow \\ \omega & \leftarrow \varphi \text{ LINEAL} \end{array}$$

$$\boxed{\varphi(v_1, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, v_k)}$$

Def: El grupo de permutaciones  $S_k$  actúa linealmente sobre  $\underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-veces}} =: V^{\otimes k}$ .

$$\sigma \in S_k \quad \rho(\sigma) : V^{\otimes k} \xrightarrow{\text{lineal}} V^{\otimes k}$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k \longmapsto v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

$$\rho(\sigma) \stackrel{(T)}{=} \sigma \cdot T$$

$(V^{\otimes k}, \rho)$  es una rep de  $S_k$

Def:  $T \in V^{\otimes k}$  es un tensor simétrico si:

$$\forall \sigma \in S_k \quad \boxed{\sigma \cdot T = T}$$

Def:  $T \in V^{\otimes k}$  es un tensor alternante si:

$$\forall \sigma \in S_k \quad \boxed{\sigma \cdot T = \text{sgn}(\sigma) T} \quad \text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ Par} \\ -1 & \sigma \text{ Impar} \end{cases}$$

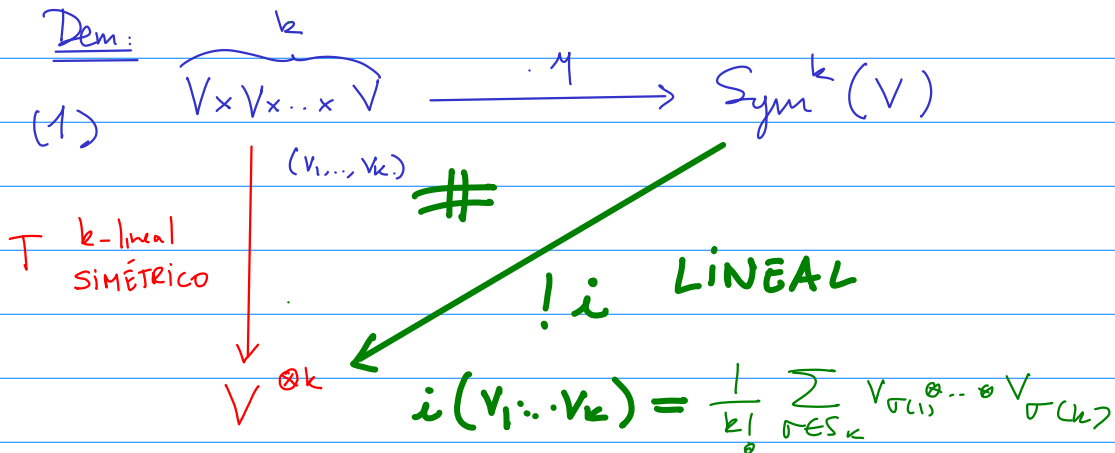
Cómo caracterizar tensores simétricos y alternantes?

" $\text{Sym}^k V$  es el espacio de tensores simétricos en  $V^{\otimes k}$ "

Teorema:

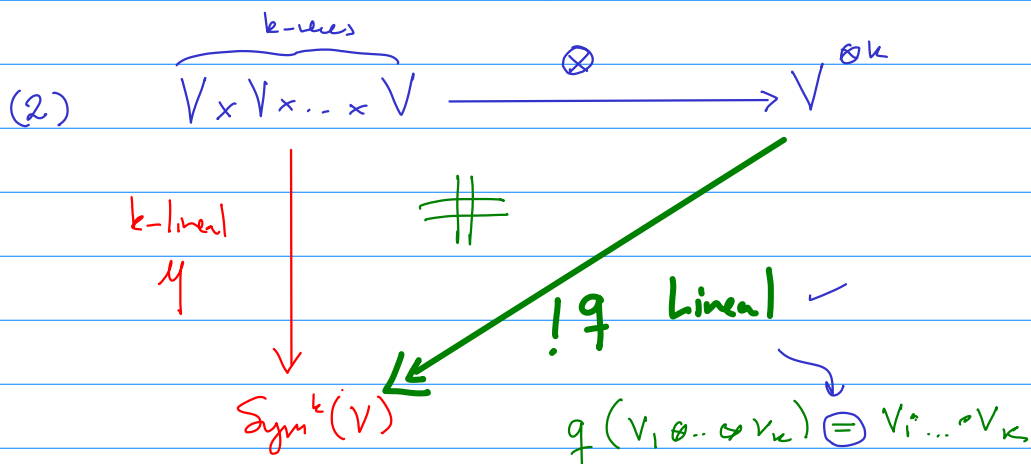
- (1) Hay una inclusión  $i: \text{Sym}^k(V) \rightarrow V^{\otimes k}$  ✓
- (2) Hay una sobreyección  $q: V^{\otimes k} \rightarrow \text{Sym}^k(V)$   
con  $q \circ i = \text{id}_{\text{Sym}^k(V)}$
- (3)  $[\text{im}(i) = \{T \in V^{\otimes k} : \sigma \cdot T = T\}]$

Dem:



$$T(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

Note que  $T$  es  $k$ -lineal y simétrica.  
suma de ops  $k$ -lineales      "truco de probar"



Note que  $\text{im}(q) \cong \{ e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n} : a_i \in \mathbb{N}, a_1 + \dots + a_n = k \}$

$$e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n} = q \left( \underbrace{e_1 \otimes \dots \otimes e_1}_{a_1} \otimes \underbrace{e_2 \otimes \dots \otimes e_2}_{a_2} \otimes \dots \otimes \underbrace{e_n \otimes \dots \otimes e_n}_{a_n} \right)$$

luego  $q$  es sobreal.

Af:  $f \circ i = id_{\text{Sym}^k(V)}$  ✓ porque es cierto en descomposables de  $\text{Sym}^k(V)$

Sean  $v_1, \dots, v_k \in V$

$$i(v_1 \dots v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

$$f(i(v_1 \dots v_k)) \stackrel{f \text{ lineal}}{=} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} f(v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)})$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \cdot v_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot v_{\sigma(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_1 \cdot \dots \cdot v_k$$

$= v_1 \cdot \dots \cdot v_k$ , en particular  $i$  es 1-1

$$i(p) = i(q) \Rightarrow f(i(p)) = f(i(q))$$

(3)

Af: Hay una única función lineal  $\pi: V^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k}$  que es descomponible y satisface

$$\pi(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

Más aún:

(1) Si  $T$  es simétrico entonces  $\pi(T) = T$

(2)  $\text{im}(\pi) = \{T \in V^{\otimes k} : \sigma \cdot T = T\}$

Dem:  $V \times \dots \times V \xrightarrow{\otimes} V^{\otimes k}$

$(v_1, \dots, v_k)$   
 $\downarrow$   $k$ -lineal (híbrido)  
 $\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$   
 $\downarrow$   
 $V^{\otimes k}$

$\neq$

**!  $\pi$  LINEAL**

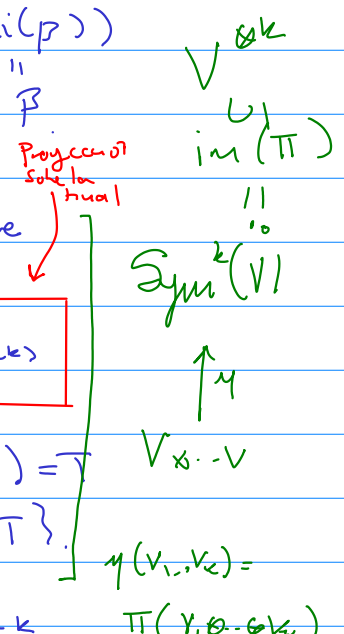
$$\left[ \pi = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \cdot \right]$$

(1)

Si  $T$  es simétrico  $\sigma \cdot T = T$   $\text{im}(\pi)$

$$\pi(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \cdot T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T = T$$

Así que  $\text{im}(\pi) \supseteq \{T \in V^{\otimes k} : \sigma \cdot T = T\}$



Si  $\sigma \in S_k$   $J_\sigma(\pi(T))$

$$J_\sigma \left( \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \cdot T \right) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \overbrace{(J_\sigma \cdot \sigma)}^{\text{recone } S_k} (T)$$

luego  $\text{im}(\pi) \subseteq \{T \in V^{\otimes k} : \sigma \cdot T = T\}$   $\overset{\pi(T)}{=} \checkmark$

Para concluir note que

$$\pi(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = i(v_1 \cdot \dots \cdot v_k)$$

luego  $\text{im}(\pi) = \text{im}(i)$

luego  $\text{im}(i) = \{T \in V^{\otimes k} : \sigma \cdot T = T\}$

Def:  $F \in \text{Sym}^k(V)$  es descomponible si  $F = v^k$  para algun  $v \in V$  ( $F$  es potencia de una forma lineal).

Si  $F \in \text{Sym}^k(V)$  el rango de Waring de  $F$

$$R_w(F) = \min \{w \in \mathbb{N} : \exists v_1, \dots, v_w : F = v_1^k + \dots + v_w^k\}$$

Ejercicio: Si  $F \in \text{Sym}^k(V) \Rightarrow R_w(F) \leq \binom{k+n-1}{k}$   
 $\dim(V) = n$

Obs: Sabemos que  $\text{Sym}^k(V) \xrightarrow{i} V^{\otimes k}$

$$i(v_1^k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_1 = \underbrace{v_1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_1}_{\text{descomponible en } V \otimes \dots \otimes V}$$

$$R_w(F) \geq R(i(F))$$

↳ subte

Dem: Si  $F = \sum_{j=1}^w v_j^k$   $w = R_w(F)$   
 aplicamos  $i$   $j=1$  (lineal)

$$\underbrace{i(F)}_{\substack{\uparrow \\ \text{término} \\ \text{mético}}} = \sum_{j=1}^w i(V_j^{(k)}) = \sum_{j=1}^w v_j \otimes v_j \otimes \dots \otimes v_j$$

es  $i(F)$  como suma de dos composites

$$w \geq R(i(F)).$$

[Comon]

Conjetura: Si  $T$  es métrico entonces

$$R(\underbrace{i^{-1}(T)}_w) = R(T)$$

"Rango métrico  
de  $T$ "

Paper: Conjetura falsa o o o

Shitov — "A counterexample to  
Comon's conjecture".

Paper: Chiantini, Haverstein, Ikenmeyer,  
Landsberg, Ottaviani

→ "Polynomials and the exponent  
of matrix multiplication."

Ejercicio: 2.5.2.1 [L1]

$\text{tr}(ABC) \sim$  "Producto de mat"

$\text{tr}(A^3) \sim$  polinomio cúbico.

Ejercicio: 2.6.B.3 [L1]

"primal polinización" sine para  
cotas inferiores para rango de Waring

(2) Tensores alternantes.

Lema: Existe ! función lineal  $\pi_{\text{sgn}} : V^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k}$   
 $\pi_{\text{sgn}}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) [v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}]$

Más aún:

- (1) Si  $T$  es alternante  $\pi(T) = T$
- (2)  $\text{im}(\pi_{\text{sgn}}) = \{ T \in V^{\otimes k} : \sigma \cdot T = \text{sgn}(\sigma) T \}$ .

Ejercicio: Demuestre el Lema

Def:  $\Lambda^k V := \text{im}(\pi_{\text{sgn}}) \subseteq V^{\otimes k}$

$$\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k\text{-veces}} \xrightarrow{\Lambda} \Lambda^k(V)$$

$$(v_1, \dots, v_k) \xrightarrow{\pi_{\text{sgn}}} \pi_{\text{sgn}}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k := \pi_{\text{sgn}}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$$

Lema:

(1)  $\Lambda$  es  $k$ -lineal y alternante

(2)  $(\Lambda^k V, \wedge)$  satisface la siguiente propiedad universal

$$T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

$$\text{sgn}(\sigma) T(v_1, \dots, v_k)$$

$$\Lambda(v_1, \dots, v_k) \equiv v_1 \wedge \dots \wedge v_k$$

notación

$$V \times \dots \times V \xrightarrow{\Lambda} \Lambda^k V$$

$\neq$

$\forall T$   $k$ -lineal y ALTERNANTE

!  $\varphi$  Lineal

$\forall \omega$

$\omega$

Ej: Verifique el Lema anterior

Lema: (1) Demuestre que  $\Lambda^k V$  tiene una base  
 $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$   
 luego  $\dim(\Lambda^k V) = \binom{n}{k}$

(2) Escriba  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} c_I e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$   
 $\uparrow$   
 $\Lambda^k V$  ↖  $c_I \in \mathbb{F}$ ,  $\in \Lambda^k V$

(3)  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0 \iff$  los  $\{v_1, \dots, v_k\}$   
 son l.i. dep en  $V$ .

Ejercicio: Demuestre el Lema.

Ejercicio: [LL] (2.6.10) - (2.6.12)

Lema:  $V \xrightarrow[\text{l. real}]{T} U$   
 $\vdots$   
 $\Lambda^k V \xrightarrow{\Lambda^k T} \Lambda^k U$  ↘  $\text{functor}$

Ejercicio: ↗.