Hoy: Propiedades básicas de $R(T)$

Recuerde que $T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ tiene

$$R(T) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists\, D_1, \dots, D_n \overset{V_1 \otimes \dots \otimes V_k}{\in} \text{ DESCOMPONIBLES},\ T = D_1 + \dots + D_n \right\}$$

Ejemplo: Si $k=2$ entonces $T \in V_1 \otimes V_2 \overset{\varphi}{\cong} \mathrm{Hom}(V_1^*, V_2)$

$$R(T) = \dim \mathrm{Im}(\varphi(T)) \leftarrow \text{rango de alg. lineal}$$

El comportamiento de $R(T)$ puede ser muy distinto al del rango de matrices.

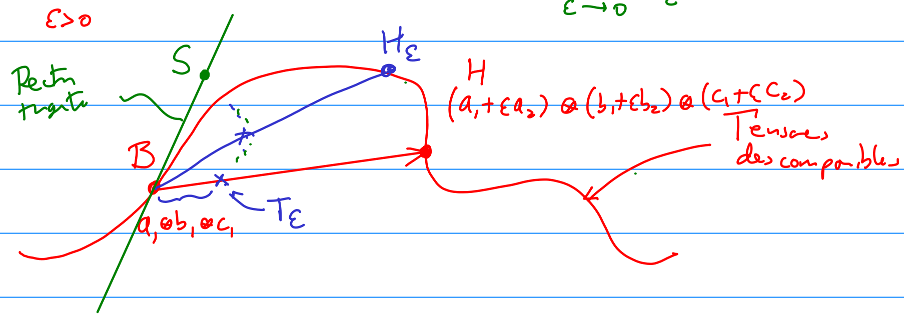
Ejemplo: En $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$$\langle a_1, a_2 \rangle \otimes \langle b_1, b_2 \rangle \otimes \langle c_1, c_2 \rangle$$

$$T_\varepsilon := a_1 \otimes b_1 \otimes c_1 + \frac{\left[(a_1 + \varepsilon a_2) \otimes (b_1 + \varepsilon b_2) \otimes (c_1 + \varepsilon c_2) - a_1 \otimes b_1 \otimes c_1 \right]}{\varepsilon}$$

$$T_\varepsilon := B + \frac{H - B}{\varepsilon} \qquad S := \lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$



Si $\varepsilon > 0$ $\quad R(T_\varepsilon) \leq 2$ porque $T_\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) B + H$

$$S = \lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = a_1 \otimes b_1 \otimes c_1 + \left[\frac{\varepsilon \left[a_2 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_2 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_2 \right] + \varepsilon^2(\dots)}{\varepsilon} \right]$$

$$\left[S = a_1 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_2 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_2 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_2 \right.$$

* **Ejercicio:** (a) Demuestre que $R(S) \geq 3$]
(b) Verifique que ocurre en $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ $\quad k \geq 3$ $\quad \dim(V_i) > 1$

NOTE QUE:

$\forall \varepsilon \quad T_\varepsilon \in \{ T \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 : R(T) \leq 2 \}$ NO ES UN CONJUNTO CERRADO!

$S \notin$

Si $k=2$ $\quad \{T \in V_1 \otimes V_2 : R(T) \leq k\}$ si es cerrado

↖ MUY especial

Def: El "border rank" de $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$

$$\underline{R}(T) = \min\{n \in \mathbb{N} : \exists\, (T_j)_{j\in\mathbb{N}},\ R(T_j) \leq n \text{ y } \lim_{j\to\infty} T_j = T\}$$

Es decir $\underline{R}(T) \leq m \iff T$ es límite de tensores de rango m. Las ventajas de esta definición son:

(1) $\{T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k : \underline{R}(T) \leq s\}$ es cerrado.

Ejercicio: Verifique esto.

(2) $\forall T \quad \left(R(T) \geq \underline{R}(T)\right)$

Obs: Suponga que p es un polinomio en $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$

$p \in \operatorname{Sym}^d\left((V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)^*\right)$ con $P(T) = 0$

$\forall T$ con $R(T) \leq m$. $\Rightarrow P(T) = 0$

en todo T con $\underline{R}(T) \leq m$.

(Razón si T tiene $\underline{R}(T) \leq m$ $\exists$ T_j

$\lim_{j\to\infty} T_j = T$ y $P(T_j) = 0$ luego

por continuidad $\lim_{j\to\infty} P(T_j) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad P(T)$)

Así que $\forall A \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ $\quad P(A) \neq 0$

$$\Rightarrow \underline{R}(A) > m$$

Más aún $\{T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k : \underline{R}(T) \leq m\}$ es un conjunto definido por polinomios así que siempre existe "tests algebraicos" para el border rank.

Geometría Algebraica

$$T(A^*)$$

Sea $T \in A \otimes (B \otimes C) = \mathrm{Hom}(A^*, B \otimes C)$

Convierte el rango de $T \in A \otimes B \otimes C$ en un problema sobre espacios de matrices

Teorema: $R(T) \leq m \iff$ Existen m "matrices" de rango 1 en $B \otimes C$, $b_1 \otimes c_1, \dots, b_m \otimes c_m$ tales que que $T(A^*) \subseteq \langle b_1 \otimes c_1, \dots, b_m \otimes c_m \rangle$

$$A \otimes B \otimes C$$

Ejemplo: $\langle a_1, a_2 \rangle \otimes \langle b_1, b_2 \rangle \otimes \langle c_1, c_2 \rangle$

$$S = \underbrace{a_1 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_2 \otimes b_1 \otimes c_1}_{(a_1+a_2)\otimes b_1 \otimes c_1} + a_1 \otimes b_2 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_2$$

$$(a_1+a_2) \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_2 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_2$$

$S(A^*)$, tomemos α_1, α_2 base de A^* dual de a_1, a_2

$$S(\alpha_1) = b_1 \otimes c_1 + b_2 \otimes c_1 + b_1 \otimes c_2 = \begin{array}{c|cc} & \beta_1 & \beta_2 \\ \hline c_1 & 1 & 1 \\ c_2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$S(\alpha_2) = b_1 \otimes c_1 = \begin{array}{c|cc} & \beta_1 & \beta_2 \\ \hline c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$S(A^*) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \subseteq \langle \underbrace{M_1, M_2, M_3}_{\text{rango } 1} \rangle$$

$$\cap|$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$R(S) \leq 3$

$R(S) \not\leq 2$

Cuál es el mínimo número de matrices de rango 1 que me permiten generar $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

Corolario: Si $a \leq b \leq c$ y $T \in A \otimes B \otimes C$

$R(T) \leq ab$ $\qquad \mathrm{Hom}(C^*, A \otimes B)$

Dem: $T(C^*) \subseteq A \otimes B$ luego

$\dim(T(C^*)) \leq \dim(A \otimes B) = ab$

$A \otimes B$ se puede generar mediante ab matrices de rango 1

$a_1, \dots, a_a \quad b_1, \dots, b_b$

$(a_i \otimes b_j)$ — rango 1

Obs: En $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^b$

$R(T) \leq \frac{3b}{2} < 2b$ así que no es óptimo siempre.

Dem del Teorema:

Supongamos que $R(T) \leq m$ es decir

$T = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i \otimes c_i$ para $a_i, b_i, c_i \in A \times B \times C$

$\Big\{$ Sean $\alpha_1,\dots,\alpha_a$ base dual de A^*

$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_j(a_i)\, b_i\otimes c_i = b_j\otimes c_j$

$T(A^*) \subseteq \langle b_1\otimes c_1,\dots, \underbrace{b_m\otimes c_m}_{\text{rango } 1}\rangle$ ✓

Recíprocamente, supongamos que

$T(A^*) \subseteq \langle b_1\otimes c_1,\dots, b_m\otimes c_m\rangle$

Sean $\alpha_1\dots\alpha_a$ base de A^*

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i^{(j)}\, b_i\otimes c_i$$

Queremos $\vec{z}_i$: $\alpha_j(\vec{z}_i) = c_i^{(j)}$ ✓ $\quad 1\le j\le a$

$$\Big[\vec{z}_i := \sum_{j=1}^{a} c_i^{(j)} a_j\Big]$$

$$T = \sum_{i=1}^{m} z_i\otimes b_i\otimes c_i$$

así que $R(T)\le m$

Obs: Si $R(T)\le m$ entonces

$\dim\big(\mathrm{im}(T(A^*))\big) \le m$

así que $T\in \mathrm{Hom}(A^*, (B\otimes C))$

tiene todos los $(m+1)\times(m+1)$ menores

iguales a cero.

$\{T : \underline{R(T)\le m}\} \subseteq \{T\in \mathrm{Hom}(A^*, B\otimes C)$ cuyos $(m+1)\times(m+1)$ menores se desvanecen$\}$

Ejemplo: $S = a_1b_1c_1 + a_2b_1c_1 + a_1b_2c_1 + a_1b_1c_2$

$S\in A\otimes B\otimes C \in \mathrm{Hom}(A^*, B\otimes C)$

$$\begin{array}{c|cc} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \hline b_1\otimes c_1 & 1 & 1 \\ b_1\otimes c_2 & 1 & 0 \\ b_2\otimes c_1 & 1 & 0 \\ b_2\otimes c_2 & 0 & 0 \end{array}$$

para $R(T)\le m$

"Ecuaciones en $B\otimes C$

$\leftarrow$ $\mathrm{Sym}^d(B\otimes C)$"

Como rep de $GL(B)\times GL(C)$

Si $R(T)\le 2 \Rightarrow$ 3 menores se anulan ✓

Flattenings ... llevan a cotas inf para $R(M_{n,n,n})$

$T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_k \qquad k \geq 3$

Cómo se comporta $R(T)$ en general?

"Teorema" (Preview) Existe un número $g(V_1 \otimes \dots \otimes V_k)$ tal que

(1) "Casi todo T" tiene $R(T) = g$ "generic rank"

(2) Si $R(T) < g \Rightarrow$ "Casi siempre" T tiene finitas descomposiciones como suma de g descomponibles Ap lin ciclo

Geom. algebraica

(3) Si $R(T) > g \Rightarrow$ Tiene infinitas descomp. como suma de $R(T)$ des comp.

(4) $R(T) \leq 2g$

(5) $\forall T \ \underline{R}(T) \leq g$

g se espera que sea $g = \left\lceil \dfrac{a_1 \cdots a_k}{a_1 + \dots + a_k - k + 1} \right\rceil$

defectividad de secantes.

$a_i = \dim(V_i)$