Ejemplo: Mult de matrices

$$\begin{tikzcd} U^m \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & & V^n \arrow[dl, "f"] \\ & W_p & \end{tikzcd}$$

$A = \mathrm{Hom}(V,W) = V^* \otimes W$ $\dim(A) = np$

$B = \mathrm{Hom}(U,V) \sim mn$

$C = \mathrm{Hom}(U,W) \sim mp$

$M : A \times B \xrightarrow{\text{bilineal}} C$

$\downarrow \otimes \quad \exists!$

$\hat{M} : A \otimes B \xrightarrow[\text{lineal}]{\hat{M}} C$

$$\begin{array}{c} \\ p \end{array}\overset{n}{\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}}\ \begin{array}{c} \\ n \end{array}\overset{m}{\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}} = \begin{array}{c} \\ p \end{array}\overset{m}{\begin{bmatrix} C \end{bmatrix}}$$

$\hat{M} \in \mathrm{Hom}(A \otimes B, C) = (A \otimes B)^* \otimes C$

$\dim(A^* \otimes B^* \otimes C) = \underbrace{m^2 n^2 p^2}$ $\quad \underbrace{\hat{M} \in [A^* \otimes B^* \otimes C]}$

$$\boxed{M\left(\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a^1_1 b^1_1 + a^1_2 b^2_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}}$$

$B_C = \left(c^1_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ c^1_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ c^2_1,\ c^2_2\right)$

$B_{A^*} = \left(\alpha^1_1\left(\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{bmatrix}\right) = a^1_1,\ \alpha^1_2, \alpha^2_1, \alpha^2_2 \right)$

$\alpha^1_1 : A \longrightarrow \mathbb{C}$

$B_{B^*} = (\beta^1_1, \beta^1_2, \beta^2_1, \beta^2_2)$

$$\hat{M} = \Big[\big(\overbrace{\alpha^1_1 \otimes \beta^1_1 + \alpha^1_2 \otimes \beta^2_1}^{n \text{ términos}} \otimes \overbrace{c^1_1}^{pm}\big)\Big] +$$

$$* \quad \big(\alpha^1_1 \otimes \beta^1_2 + \alpha^1_2 \otimes \beta^2_2 \otimes c^1_2\big) + \square + \square$$

$$* = \boxed{\alpha_1^1 \otimes \beta_1^1 \otimes C_1^1} + (\alpha_2^1 \otimes \beta_1^2 \otimes C_1^1) \in \operatorname{Im}(\otimes)$$

Tot des componibles

cada tensor cuenta UNA multiplicación entre entradas de A y de B

Def: Si $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$

$$\underbrace{R(T)}_{\text{rango de } T} = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists\, T_1, \ldots, T_n \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_m \text{ descomponibles},\ T = \sum_{i=1}^{n} T_i \right\}$$

Lema: Sea $\hat{M}_{\langle m,n,p \rangle}$ el tensor de mult de matrices $(p \times n) \times (n \times m)$

$$R(\hat{M}_{\langle m,n,p \rangle}) \leq mpn << \underbrace{(mpn)^2}_{\text{dim espacio}}$$

En particular, si $m = p = n = 2$, $R(\hat{M}_{\langle 2 \rangle}) \leq 8$

Existe un algoritmo para multiplicar matrices 2×2 con 8 multiplicaciones.

$$\hat{M} \in A^* \otimes B^* \otimes C = \operatorname{Hom}(V,W)^* \otimes \operatorname{Hom}(U,V)^* \otimes \operatorname{Hom}(U,W)$$

$$= (V \otimes W^*) \otimes (U \otimes V^*) \otimes U^* \otimes W$$

$$\hat{M} \in [V \otimes V^* \otimes W \otimes W^* \otimes U \otimes U^*]$$

$*$ $\boxed{\text{Pregunta:}}$ Existe algún otro algoritmo para multiplicar matrices 2×2 que utilice < 8 multiplicaciones?

Se sabe

$7 \le R(M_{\langle 2,2,2\rangle}) \le 7$

<u>Teorema</u> (Shassen)
(Strassen 1969)

descomponible

$$\underbrace{M}_{2,2,2} = \boxed{(a^1_1 + a^2_2)\otimes(b^1_1 + b^2_2)\otimes(c^1_1 + c^2_2)} +$$
$$(a^2_1 + a^2_2)\otimes b^1_1 \otimes (c^2_1 - c^2_2) +$$
$$a^1_1 \otimes (b^1_2 - b^2_2)\otimes(c^1_2 + c^2_2) +$$
$$a^2_2 \otimes (-b^1_1 + b^2_1)\otimes(c^2_1 + c^1_1) +$$
$$(a^1_1 + a^1_2)\otimes b^2_2 \otimes(-c^1_1 + c^1_2) +$$
$$(-a^1_1 + a^2_1)\otimes(b^1_1 + b^1_2)\otimes c^2_2 +$$
$$(a^1_2 - a^2_2)\otimes(b^2_1 + b^2_2)\otimes c^1_1$$

$*$

Ejercicio: (1) Verifique la igualdad de arriba
(2) Calcular $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ mediante Shassen.

<u>Idea:</u> (Shassen) Podemos utilizar esta idea para calcular productos de matrices más grandes.

(0) Cuántos productos necesito con algoritmo usual? total: $n\cdot n^2 = n^3$, $2^k\cdot 2^{2k} = 2^{3k}$

(1) Cuántas operaciones necesito? 8^k

$$\begin{array}{c} 4 \\ \end{array}\begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{bmatrix}_{4\times 4}\cdot \begin{bmatrix} B^1_1 & B^1_2 \\ B^2_1 & B^2_2 \end{bmatrix}_{4\times 4} = [n^2]$$

usando Strassen

$\log_2(n) = k$

$n = 2^k$, 7^k ops. $7^{\log_2(n)} = (2^{\log_2(7)})^{\log_2(n)} = [n^{\log_2(7)}]$

[7 productos matriciales de 2x2]

Uso Strassen en los productos

(b) $$\begin{pmatrix} 2^{k-1}\times 2^{k-1} & \\ & \end{pmatrix}_{2^k\times 2^k}\cdot\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{2^k\times 2^k} = M(2^{k-1}, 2^{k-1})\cdot 7$$

Cuántos productos necesito?

$n(k) = 7\,n(k-1) \Rightarrow [n(k) = 7^k]$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (A+D)\circ(E+H) & 0 \\ 0 & (A+D)(E+H) \end{bmatrix} + \ldots$$

7 ~~productos de~~ matrices $(2^{k-1} \times 2^{k-1})$

$n(k)$ = # productos para $2^k \times 2^k$

$$n(k) = 7 \cdot n(k-1) = 7 \cdot 7 \cdot n(k-2) \cdots = \overbrace{7 \cdot 7 \cdots 7}^{k\text{-veces}} = 7^k$$

Def: El exponente de multiplicación de matrices $n \times n$

$$\omega(n) := \left[\inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \exists \text{ algoritmo para mult matrices } n \times n \text{ usando } \leq K n^{\alpha} \; [O(n^2)] \text{ operaciones aritméticas} \right\} \right]$$

$K \in \mathbb{R}$

Cuanto vale $\omega(n)$?

normal $\longrightarrow$ $O(n^3)$, $\alpha = 3$ $\quad \omega(n) \leq 3$

Strassen $\longrightarrow$ $O(n^{\log_2(7)})$, $\quad \omega(n) \leq \log_2(7) < 2.81$

Se sabe $\omega(n) \leq 2.3\ldots$ [Coppersmith-Winograd]

Conjetura: $[\omega(n) = 2]$ $\leftarrow$ Conj de teoría de gps finitos que implican.

"Es igual de complicado multiplicar que sumar matrices"

[**Problema:** $R(M_{\langle 3,3,7\rangle}) = ?$
ABIERTO:]

Cómo se calcula el rango de un tensor $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_m$?

$$L \leq R(T) \leq U$$

Teoría: $\quad$ construcciones explícitas ¿Cómo encontrarlas?

Queremos entender las "propiedades" de ?

$$\{ S \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_m : R(T) \leq L-1 \}$$

y verificar que alguna de estas propiedades falla en T

$V_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$ $\quad V_1^* = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ dual de $\{u_1, u_2\}$

$V_2 = \langle v_1, v_2 \rangle$

Ejemplo: $T = \underbrace{\alpha_1 \otimes v_1 + \alpha_2 \otimes v_2}$ $\in$ $V_1^* \otimes V_2 = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$

Af: $2 \leq R(T) \leq 2 \Rightarrow \boxed{R(T) = 2}$

$\left[\{ S \in V_1^* \otimes V_2 : R(S) \leq 1 \}\right] \to$ Qué tipo de conjunto es este?

$\{ S \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2) : \dim(\mathrm{im}(S)) \leq 1 \}$

$$S = \begin{array}{c|cc} & u_1 & u_2 \\ \hline v_1 & a & b \\ v_2 & c & d \end{array} : \dim(\mathrm{im}(S)) \leq 1$$

"Propiedades" " "Ecuaciones del conjunto"

$$ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ad - bc)(T) = 1 \neq 0 \checkmark$$

[* Ejercicio:] $V = \langle v_1 \dots v_n \rangle$ $\quad V^* = \langle \alpha_1 \dots \alpha_n \rangle$ dual de v_i

$U = \langle u_1 \dots u_n \rangle$

$\{ T \in V^* \otimes U : R(T) \leq j \} = \{ T \in \mathrm{Hom}(V, U) :$ los menores de tamaño $j+1$ de la matriz de T se desvanecen $\}$

determinante de una submatriz $(j+1) \times (j+1)$ de la mat de T.