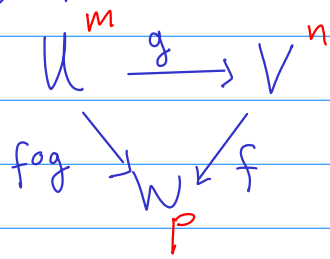


Ejemplo: Mult de matrices



$$A = \text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W \quad \dim(A) = np$$

$$B = \text{Hom}(U, V) \sim mn$$

$$C = \text{Hom}(U, W) \sim mp$$

$$\begin{array}{ccc}
 M : A \times B & \xrightarrow{\text{bilinear}} & C \\
 \hat{M} : A \otimes B & \xrightarrow{\#} & C \\
 & \hat{M} \text{ linear} &
 \end{array}$$

$$\hat{M} \in \text{Hom}(A \otimes B, C) = (A \otimes B)^* \otimes C$$

$$\dim(A^* \otimes B^* \otimes C) = \underbrace{m^2 n^2 p^2}$$

$$\hat{M} \in [A^* \otimes B^* \otimes C]$$

$$M \left(\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_1^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$B_C = (c_i^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, c_i^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, c_1^2, c_2^2)$$

$$B_{A^*} = \left(\alpha_i^1 \left(\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix} \right) = a_i^1, \alpha_i^2, \alpha_1^2, \alpha_2^2 \right)$$

$$B_B = (\beta_1^1, \beta_2^1, \beta_1^2, \beta_2^2)$$

$$\hat{M} = \left[\left(\underbrace{\alpha_1^1 \otimes \beta_1^1 + \alpha_2^1 \otimes \beta_1^2}_{n \text{ términos}} \otimes \underbrace{c_i^1}_{pm} \right) + \dots \right]$$

$$* \left(\alpha_1^1 \otimes \beta_2^1 + \alpha_2^1 \otimes \beta_2^2 \otimes c_i^2 \right) + \square + \square$$

$$* = \underbrace{\left(\alpha_1 \otimes \beta_1 \otimes C \right)}_{\substack{\text{cada tensor cuenta} \\ \text{UNA multiplicación} \\ \text{entre entradas de A y de B}}} + \left(\alpha_2 \otimes \beta_1 \otimes C \right) \in \frac{\dim(V)}{T_0} \text{ de descomposables}$$

Def: Sea $T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_m$

$$R(T) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists T_1, \dots, T_n \text{ descomposables} \right\}$$

$T = \sum_{i=1}^n T_i$

Lema: Sea $\hat{M}_{\langle m, n, p \rangle}$ el tensor de mult de matrices $(p \times n) \times (n \times m)$

$$R(\hat{M}_{\langle m, n, p \rangle}) \leq mpn \ll \underbrace{(mpn)^2}_{\text{dim espacio}}$$

En particular, si $m=p=n=2$, $R(\hat{M}_{\langle 2, 2 \rangle}) \leq 8$

Existe un algoritmo para multiplicar matrices 2×2 con 8 multiplicaciones.

$$\begin{aligned} \hat{M} &\in A \otimes D \otimes C = \text{Hom}(V, W) \otimes \text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(U, W) \\ &= (V \otimes W^*) \otimes (U \otimes V^*) \otimes U \otimes W \\ \hat{M} &\in [V \otimes V^* \otimes W \otimes W^* \otimes U \otimes U^*] \end{aligned}$$

* Pregunta: Existe algún otro algoritmo para multiplicar matrices 2×2 que utilice < 8 multiplicaciones?

Se sabe

$$7 \leq R(M_{(2,2,2)}) \leq 7$$

Teorema (Strassen)
(Strassen 1969)

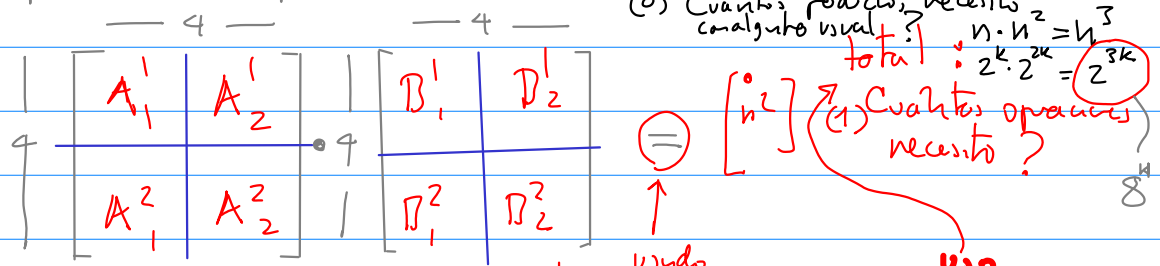
descomponible

$$M_{2,2,2} = \begin{matrix} \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\ \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\ \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\ \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\ \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\ \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\ \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\ \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \end{matrix} \begin{matrix} (d_1^1 + d_2^2) \otimes (b_1^1 + b_2^2) \otimes (c_1^1 + c_2^2) + \\ (a_1^2 + a_2^2) \otimes b_1^1 \otimes (c_1^2 - c_2^2) + \\ a_1^1 \otimes (b_2^1 - b_2^2) \otimes (c_1^1 + c_2^2) + \\ a_2^1 \otimes (-b_1^1 + b_1^2) \otimes (c_1^2 + c_1^1) + \\ (a_1^1 + a_2^2) \otimes b_2^2 \otimes (-c_1^1 + c_1^2) + \\ (-a_1^1 + a_2^2) \otimes (b_1^1 + b_2^1) \otimes c_2^2 + \\ (a_1^1 - a_2^2) \otimes (b_1^2 + b_2^2) \otimes c_1^1 \end{matrix}$$

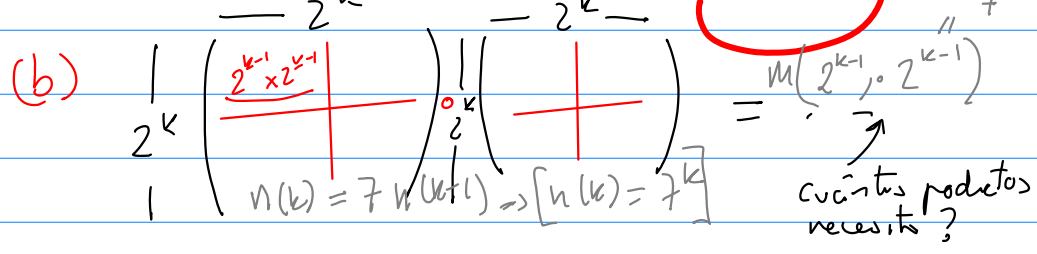
Ejercicio:

- Verifique la igualdad de arriba
- Calcular $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ mediante Strassen.

Idea: (Strassen) Podemos utilizar esta idea para calcular productos de matrices más grandes.



$\log_2(n) = k$
 $n = 2^k$, 7^k ops.
 Uso Strassen en los productos
 [7 productos matriciales de 2x2]



$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (A+D) \circ (E+H) & 0 \\ 0 & (A+D)(E+H) \end{bmatrix} + \dots$$

7 products de matrices
 $(2^{k-1} \times 2^{k-1})$

$$n(k) = \# \text{ productos para } 2^k \times 2^k$$

$$n(k) = 7 \cdot n(k-1) = 7 \cdot 7 \cdot n(k-2) \dots = \underbrace{7 \cdot 7 \dots 7}_{k \text{-veces}} = 7^k$$

Def: El exponente de multiplicación de matrices $n \times n$

$$\omega(n) := \left[\inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \exists \text{ algoritmo para mult matrices } n \times n \text{ usando } \leq \underbrace{O(n^\alpha)}_{\substack{\text{operaciones} \\ \text{aritméticas}}} \right\} \right]$$

Cuanto vale $\omega(n)$?

normal $\rightarrow O(n^3)$, $\alpha = 3$, $\omega(n) \leq 3$

Strassen $\rightarrow O(n^{\log_2(7)})$, $\omega(n) \leq \log_2(7) < 2.81$

se sabe $\omega(n) \leq 2.3 \dots$ [Coppersmith-Winograd]

Conjetura: $[\omega(n) = 2]$ ← Conj de teoría de gp's finitas que implican.
 "Es igual de complicado multiplicar que sumar matrices"

Problema: $R(M_{\langle 3,3,3 \rangle}) \stackrel{?}{=} ?$
ABIERTO:

Cómo se calcula el rango de un tensor T ?

$$L \leq R(T) \leq U \quad V_1 \otimes \dots \otimes V_m$$

Teoría: \leftarrow construcciones explícitas
 ¿Cómo escalamos? \leftarrow

Queremos entender las "propiedades" de

$$\{ S \in V_1 \otimes \dots \otimes V_m : R(T) \leq L-1 \}$$

y verificar que alguna de estas propiedades falla en T

$$V_1 = \langle u_1, u_2 \rangle \quad V_1^* = \langle d_1, d_2 \rangle \text{ dual de } \{u_1, u_2\}$$

$$V_2 = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Ejemplo: $T = d_1 \otimes v_1 + d_2 \otimes v_2 \in V_1^* \otimes V_2 = \text{Hom}(V_1, V_2)$

Af: $2 \leq R(T) \leq 2 \Rightarrow R(T) = 2$

$\{S \in V_1^* \otimes V_2 : R(S) \leq 1\}$ ¿Qué tipo de conjunto es este?

$$\{S \in \text{Hom}(V_1, V_2) : \dim(\text{im}(S)) \leq 1\}$$

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{matrix} : \dim(\text{im}(S)) \leq 1$$

"Propiedades"

"Ecuación del conjunto"

$$ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ad - bc)(T) = 1 \neq 0 \checkmark$$

* Ejercicio: $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \quad V^* = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ dual de v_i

$U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$

$$\{T \in V^* \otimes U : R(T) \leq j\} = \{T \in \text{Hom}(V, U) : \text{los menores de tamaño } j \times j \text{ de la mat de } T \text{ se desvanecen}\}$$

determinante de una submat $(j \times j)$ de la mat de T .