Recapitulemos 2-tensores = Matrices.

U, V espacios vectoriales

$$U \otimes V \xrightarrow[\text{canónico}]{\varphi} \operatorname{Hom}(U^*, V)$$

$\overset{m}{U} \otimes \overset{n}{V} \cong \mathbb{C}^{mn}$

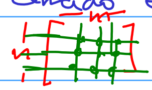
$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

Hechos: (Ejercicios)

(1) $R(T) = \dim(\operatorname{im}(\varphi(T))) \quad \forall T \in \overset{m}{U} \otimes \overset{n}{V}$

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$

$\{T : R(T) \le k\}$ es cerrado en la topología euclídea.



(3) Si fijamos bases $\operatorname{Hom}(U^*, V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$

$\{T : R(T) \le k\} = V\left(\text{determinantes de las submatrices de tamaño } (k+1)\times(k+1)\right)$

$\binom{m}{k+1}\cdot\binom{n}{k+1}$ ecuaciones

Un papel clave en la prueba son las "operaciones elementales" de fila y columna. Queremos generalizar esto.

(1) Qué es "escoger una base"?

Si $\dim(U) = n$, escoger una base $(u_1, \dots, u_n) \in U$ es fijar un isomorfismo

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{B_u} U$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longrightarrow \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n$$

Sabemos que $GL(U) := \{T : U \to U \text{ lineales invertibles}\}$ actúa en U.

(2) Haber escogido una base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ establece una correspondencia entre

"El efecto de $GL(U)$ actuando en U visto en $\boxed{\text{base } \mathcal{B} \text{ FIJA}}$" $\longleftrightarrow$ "Cambios de base en U"

Qué hace?

$$\begin{tikzcd}
(\beta_1,\dots,\beta_n) \quad \mathbb{C}^n \arrow[d, "B"'] & & \mathbb{C}^n \arrow[ll, "\Psi_g"'] \arrow[d, "B"] \quad (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \arrow[ll, phantom, shift right=6ex, "\#"] \\
\{w_1,\dots,w_n\} \in U & & U \arrow[ll, "g"'] \quad u_1,\dots,u_n
\end{tikzcd}$$

intrínseco

$g \in GL(U)$ $\qquad w_i := g(u_i)$ $\qquad g(B(\vec{\alpha}))$

$$(\beta_1,\dots,\beta_n) \longmapsto \beta_1\vec{u}_1+\dots+\beta_n\vec{u}_n = \underbrace{\alpha_1 w_1+\dots+\alpha_n w_n}_{}$$

$$\Psi_g(\vec{\alpha}) = \vec{\beta}$$

Ψ_g convierte $[x]_{\{u_1,\dots,u_n\}}$ en $[x]_{\{w_1,\dots,w_n\}}$

Ψ_g cambia de base $\{u_1,\dots,u_n\}$ a $\{w_1,\dots,w_n\}$

"Módulo la acción de $GL(U)$" = "En cualquier base"

$\boxed{3}$ Hay una acción de $GL(U)\times GL(V)$ sobre $U\otimes V$, definida así: ✓

Para cada pareja $(g_u, g_v) \in GL(U)\times GL(V)$ quiero definir

$$\{T_{(g_u,g_v)}\} \subseteq GL(U\otimes V)$$

$$T_{(g_u,g_v)} : U\otimes V \xrightarrow[\text{invertible}]{\text{lineal}} U\otimes V \quad ✓$$

que satisface

$$T_{(h_u,h_v)} \circ T_{(g_u,g_v)} = T_{(h_u\circ g_u,\; h_v\circ g_v)}$$

comp en $GL(U)$ $\qquad$ comp en $GL(V)$

Dem:

$$\begin{tikzcd}
U\times V \arrow[rr, "{(\vec{u},\vec{v}) \mapsto g_u(u)\otimes g_v(v)}", "\text{bilineal}"'] \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[drr, phantom, "\#"] & & U\otimes V \\
U\otimes V \arrow[urr, "{\exists!\, T_{(g_u,g_v)}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$T_{(g_u,g_v)}(a\otimes b) = g_u(a)\otimes g_v(b)$

LINEAL

En todo descomponible tenemos ...

$$T_{(h_u,h_v)}\left(T_{(g_u,g_v)}(a\otimes b)\right) = T_{(h_u,h_v)}\left(g_u(a)\otimes g_v(b)\right)$$

$$= h_u(g_u(a)) \otimes h_v(g_v(b)) = T_{(h_u\circ g_u,\, h_v\circ g_v)}(a\otimes b)$$

Como los descomponibles generan $U\otimes V$ la igualdad es cierta para todo elemento de $U\otimes V$

$$T^{-1}_{(g_u,g_v)} = T_{(g_u^{-1},\, g_v^{-1})} \quad \checkmark$$

Lema: Sea $T\in U\otimes V$ $(g_u,g_v)\in GL(U)\times GL(V)$

$$R((g_u,g_v)\circ(T)) = R(T).$$

Dem: $L=\sum_{i=1}^{k} a_i\otimes b_i \qquad k=R(T)$

$$(g_u,g_v)\circ(L) := T_{(g_u,g_v)}(L) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} T_{(g_u,g_v)}(a_i\otimes b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} g_u(a_i)\otimes g_u(b_i)$$

así que $R((g_u,g_v)\circ(L)) \leq R(L)$

como es invertible tenemos igualdad.