Sea G un grupo y sea V un espacio vectorial de dimensión finita $/\mathbb{C}$.

Def: Una representación de G es una pareja (V, ρ) donde

(i) V es un espacio vectorial

(ii) $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ es un homomorfismo de grupos.

Notación "Sea V una rep de G" $\rightsquigarrow (V, \rho_V)$

Obs: Lo importante es que si V es una rep de G los elementos $g \in G$ se convierten en transformaciones lineales en V (Cada $g \in G$ se convierte en una matriz $\dim(V) \times \dim(V)$ si fijamos una base B de V)

$[\rho(g)]_B$

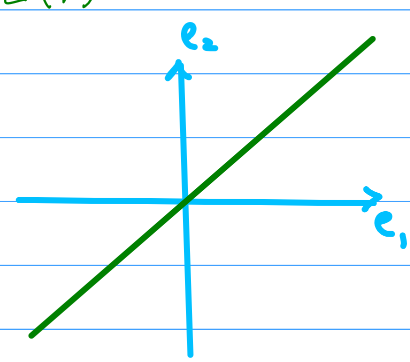
Ejemplo: $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$V = \underbrace{\langle e_1, e_2 \rangle}$

$\rho : G \xrightarrow{\text{es hom de grupos}} GL(V)$

$\rho(\bar{1}) = \begin{array}{l} e_1 \longmapsto e_2 \\ e_2 \longmapsto e_1 \end{array}$

$$\rho(\bar{1}) = \begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & 0 & 1 \\ e_2 & 1 & 0 \end{array}$$



$\underset{\rho(\bar{0})}{\rho(\bar{1}+\bar{1})} = \rho(\bar{1}) \circ \rho(\bar{1})$

ρ es hom de Grupos

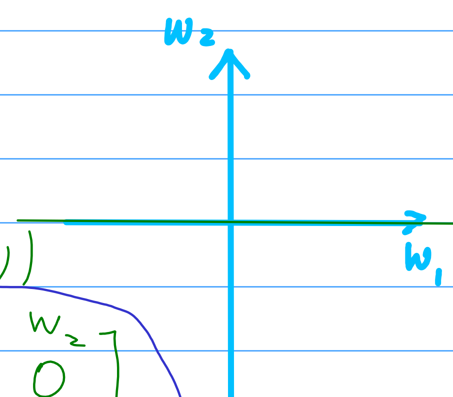
Def: Si (V_1,ρ_1) y (V_2,ρ_2) son representaciones de G un morfismo $T: V_1 \longrightarrow V_2$ es una transformación lineal que "respeta la acción" de G. Es decir

$$\forall g\in G \quad \left(\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r,"T"] \arrow[d,"\rho_1(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V_2 \arrow[d,"\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r,"T"] & V_2 \end{tikzcd}\right)$$

$$\boxed{\rho_2(g)\circ T = T\circ \underline{\rho_1(g)}}$$

Ejemplo: $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0},\bar{1}\}$

$W = \langle w_1, w_2\rangle$



$$\rho : G \longrightarrow GL(W)$$

$$\bar{1} \longmapsto \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

diagonal

Af: Es una representación de G $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Dem: $\rho(\bar{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ✓

$\rho(\bar{1}+\bar{1}) \overset{?}{=} \rho(\bar{1})\cdot\rho(\bar{1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$

Af: Las representaciones de los primeros dos ejemplos son isomorfas, un isomorfismo está dado por

$$T: \underset{\{w_1, w_2\}}{W} \longrightarrow \underset{\{e_1, e_2\}}{V}$$

$$\begin{cases} T(w_1) = e_1 + e_2 \\ T(w_2) = e_2 - e_1 \end{cases}$$

Af: T es un morfismo de reps

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho_W(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V \arrow[d, "\rho_V(g)"] \\
W \arrow[r, "T"] & V
\end{tikzcd}$$

$g = \bar{0}$ ✓

$g = \bar{1}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
W \arrow[r, "{\begin{array}{c|cc} & w_1 & w_2 \\ \hline e_1 & 1 & -1 \\ e_2 & 1 & 1 \end{array}}"] \arrow[d, "{\begin{array}{c|cc} & w_1 & w_2 \\ \hline w_1 & 1 & 0 \\ w_2 & 0 & -1 \end{array}}"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V \arrow[d, "{\begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & 0 & 1 \\ e_2 & 1 & 0 \end{array}}"] \\
W \arrow[r, "{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}"] & V
\end{tikzcd}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \checkmark \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \checkmark \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Def: Sea (V, ρ_V) una rep de G.
Un $W \subseteq V$ es un <u>subespacio invariante</u> si

$$\forall g \in G \ \forall w \in W \ \left(\rho(g)(w) \in W \right)$$

Def: Si (A, ρ_A) y (B, ρ_B) son reps de G definimos una nueva rep $(A \oplus B, \rho_{A \oplus B})$

$(A \times B, +, \cdot)$
$(\vec{a}, \vec{b})$

así:

(i) El espacio vectorial es $A \oplus B$

(ii) $\rho_{A \oplus B} : G \longrightarrow GL(A \oplus B)$

$$\rho_{A \oplus B}(g)(w) = \rho_A(g) \oplus \rho_B(g)$$

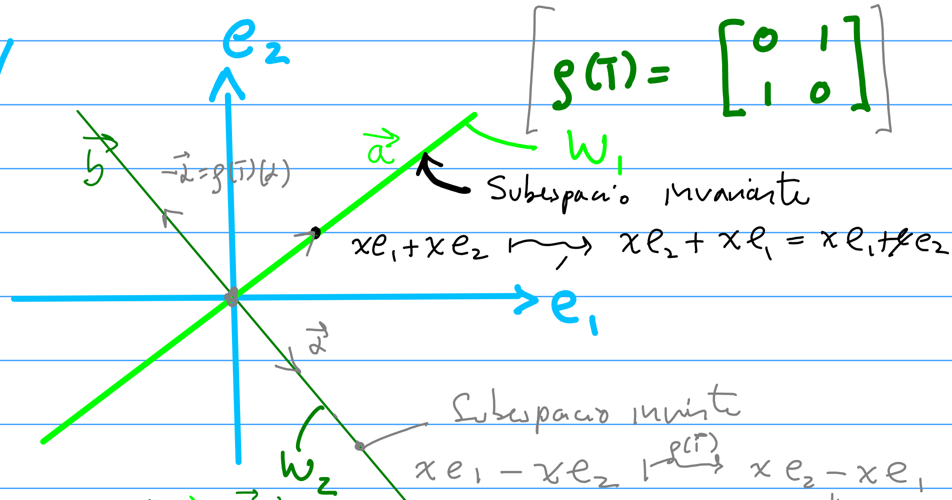
(i) $\vec{w} = (\vec{a}, \vec{b})$ de manera única

(ii) $\rho_{A \oplus B}(\vec{w}) = (\rho_A(\vec{a}), \rho_B(\vec{b}))$

Ejemplos: V

$$\rho(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$V \cong W_1 \oplus W_2$



Obs: En la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ las $\rho(g)$ son diagonales para todo G.

Ejemplo: $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$A = \langle \vec{a} \rangle \qquad \rho_A : G \longrightarrow GL(A) \qquad (A, \rho_A)$

$\qquad \bar{1} \longmapsto -1$

$B = \langle \vec{b} \rangle \qquad \rho_B : G \longrightarrow GL(A) \qquad (B, \rho_B)$

$\qquad \bar{1} \longmapsto 1$

$(A \oplus B, \rho_{A+B})$?

$B \oplus A = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ de dim 2

$$\rho_{B \oplus A}(g) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \vec{b} & \vec{a} \end{array} \\ \begin{array}{c} \vec{b} \\ \vec{a} \end{array} & \begin{bmatrix} \rho_B(\vec{b}) & 0 \\ 0 & \rho_A(\vec{a}) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\left[\rho_{B \oplus A}(\bar{1})\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right]$$

diagonal por bloques

ρ_B, $\rho_A(\cdot)$

$$(A \oplus B, \rho_{A\oplus B}) \cong (W, \rho_W)$$

$$\vec{a} \longrightarrow w_2$$

$$\vec{b} \longrightarrow w_1$$

* **Ejercicio:** (¿Cómo reconocer una suma directa?)

Sea (U, ρ_U) una rep de G y $\overset{d_1}{V_1}, \overset{d_2}{V_2} \subseteq U$ subespacios invariantes.

(a) Verifique que $\left(V_i, \rho_i : G \longrightarrow GL(V_i)\right)$
$$g \longmapsto \rho_U(g)|_{V_i}$$
es una rep de G $[(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)]$

(b) $(U, \rho_U) \cong (V_1, \rho_1) \oplus (V_2, \rho_2) \Longleftrightarrow$

$\exists$ base $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{d_1}, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{d_1}\}$ de U tal que

(i) $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{d_1}\} =: \mathcal{B}_1$ son base de V_1

(ii) $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{d_2}\} =: \mathcal{B}_2$ son base de V_2

(iii) $\forall g \in G$
$$\left([\rho_U(g)]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} [\rho_{V_1}(g)]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ \hline 0 & [\rho_{V_2}(g)]_{\mathcal{B}_2} \end{array}\right] \right)$$

* **Ejercicio:** Sea $S_3 \curvearrowright U = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$
$$\rho : S_3 \longrightarrow GL(U)$$
$$\sigma \longmapsto e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$$

Demuestre que: (1) $\underset{V_1}{\langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle}$, (2) $\underset{V_2}{\{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 : a_1 + a_2 + a_3 = 0\}}$

son subespacios invariantes.

(2) Demuestra que $U \cong V_1 \oplus V_2$

(3) Demuestra que V_2 no tiene subespacios invariantes propios no triviales (es una rep. irreducible)

¿Para qué sirve la Teoría de Representaciones?

(1) Para MUCHOS grupos (finitos, ó reductivos) tenemos un Teorema de descomposición

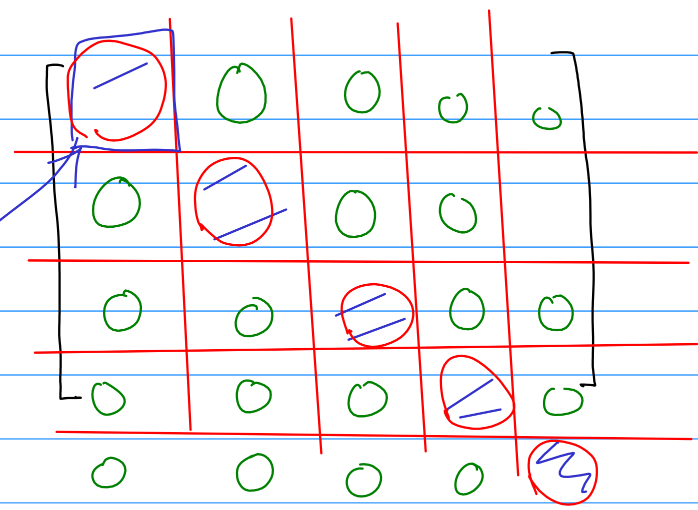
$|G|<\infty$

Teorema: Si (V,ρ_V) es una representación cualquiera de G entonces existen subespacios invariantes distinguidos (componentes isotípicas de V) W_i, $1 \le i \le N(G)$ tal que

$$V \cong W_1 \oplus \cdots \oplus W_{N(G)},$$

es decir toda representación puede diagonalizarse por bloques

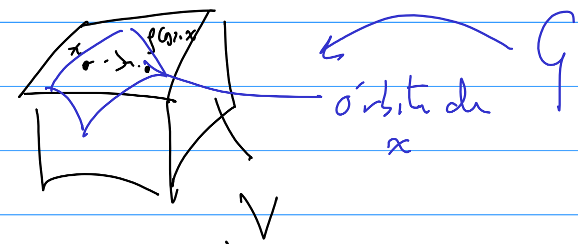
$$[\rho_V(g)]_B =$$



Cada $W_i \cong \boxed{V_j^{\oplus b_j}}$ y los V_j son finitos y dependen exclusivamente de G, (se llaman las reps irreducibles de G).

(2) Si G actúa en V y queremos estudiar propiedades "invariantes por G"

(P es invariante por G si $P(x) \iff P(\rho(g)(x))$)



En vez de pensar en V, pensamos en V/G = "órbitas de G en V"

$$x \sim y \iff \exists\, g \in G : \rho(g)(x) = y$$

$\sim$ es de equiv.

$$V/G = \{ [x]_\sim : x \in V \}$$

Ejemplo: A, B ev. $\quad \mathrm{Hom}(A,B) = A^* \otimes B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "T"] \arrow[d, "g_A"'] & B \arrow[d, "g_B"] \\ A \arrow[r, "g_B \circ T \circ g_A^{-1}"] & B \end{tikzcd}$$

($\mathrm{Hom}(A,B)$ es una rep de G)

"$G = GL(A) \times GL(B)$" actúa en $\mathrm{Hom}(A,B)$

Cómo es $\mathrm{Hom}(A,B)/G$ → [Hay finitas órbitas]