Aclaración ejercicio parcial:

$M_{n,n,n} \in \underbrace{(A \otimes A^*)}_{Hom(A,A)} \otimes (B \otimes B^*) \otimes (C \otimes C^*)$

$\circlearrowleft$

$G = GL(A) \times GL(B) \times GL(C)$

$(g_A, g_B, g_C)\,(a \otimes \alpha \otimes b \otimes \beta \otimes c \otimes \gamma)$

$g_A(a) \otimes \underbrace{g_A^*(\alpha)}_{\text{colagredient}} \otimes g_B(b) \otimes g_B^*(\beta) \otimes g_C(c) \otimes g_C^*(\gamma)$

$\{\varphi \in GL(A) : \det(\varphi) = 1\}$

$g_A^*(\alpha) = \alpha \circ g_A^{-1}$

Si $G' = \underbrace{SL(A) \times SL(B) \times SL(C)}_{\subset G}$ ← G. preserva

$$\boxed{(g_A', g_B', g_C')\,(M_{\langle n,n,n\rangle}) = M_{\langle n,n,n\rangle}}$$

Obs: Aunque $M_{\langle n,n,n\rangle}$

Si $M_{\langle n,n,n\rangle} = \underbrace{T_1 + \dots + T_7}_{\text{Strassen.}}$

$\underbrace{(g_A', g_B', g_C')}_{\vec{g}'}\,(M_{\langle n,n,n\rangle}) = M_{\langle n,n,n\rangle} = \underline{\vec{g}'(T_1)} + \dots + \underline{\vec{g}''(T_7)}$

Hoy: Geometría algebraica proyectiva 1/

Def: $\mathbb{P}^n$ — "Espacio proyectivo n-diml"

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \big/ \sim$$

espacio de rectas por el origen en $\mathbb{C}^{n+1}$

$\mathbb{P}(V)$

$$\left[\vec{u} \sim \vec{v} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^* : \lambda\vec{u} = \vec{v}\right]$$

en $V \setminus \{\vec{0}\}$

$[\vec{u}] :=$ "Clase de equivalencia de $\vec{u}$ en $\sim$"

$[1:0:0] \in \mathbb{P}^2$ → Notación $[\vec{u}] = [1:0:0]$

$= [i:0:0]$

Obs: $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$ (hiperplano en el infinito)

$(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$

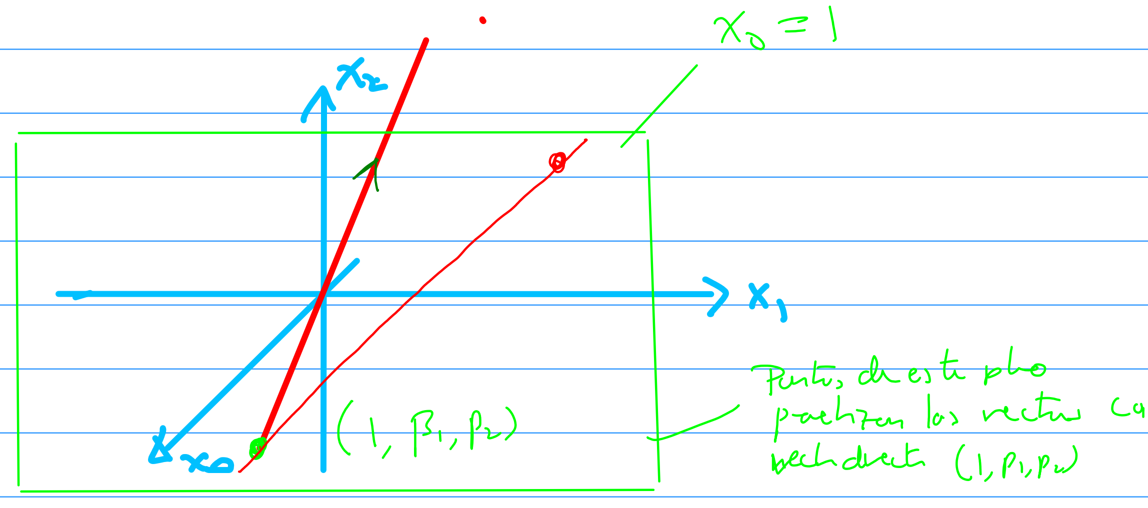
$[\vec{u}] = [x_0 : \dots : x_n]$

$x_0 \neq 0$: $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = \left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}\right] = [1 : \beta_1 : \dots : \beta_n]$

$x_0 = 0$: $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [0 : x_1 : \dots : x_n]$ — $\mathbb{P}^{n-1}$

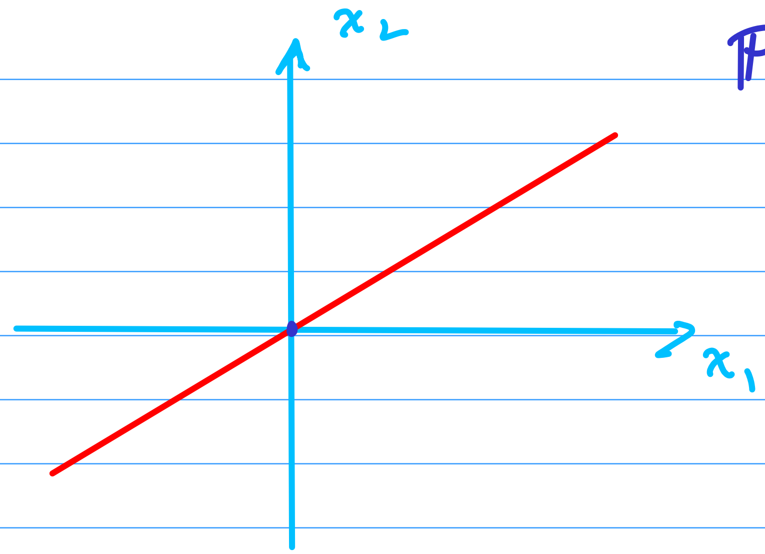
Ejemplo:

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^3 \setminus \{\vec{0}\} \big/ \sim$$

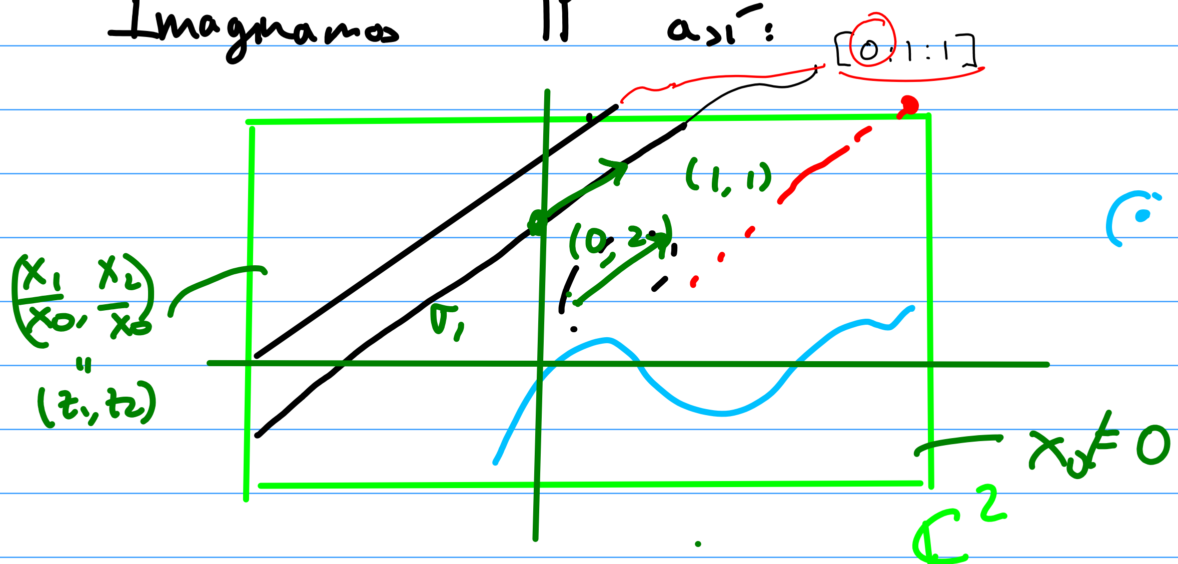


Falta recta, con $x_0 = 0$

$\mathbb{P}^1$



Imaginamos $\mathbb{P}^2$ así:



adicionalmente tengo un punto más por cada dirección. $\mathbb{P}^2$ es una compactificación de $\mathbb{C}^2$. Adicionalmente es altamente simétrica

$$(0,3) + t\,(1,1)$$

$$\sigma_1(t) = (0,2) + t\,(1,1)$$

$$(1,0,3) + t\,(0,1,1) \qquad t,\ 3+t$$

$$\sigma_1(t) = [(1,0,2) + t\,(0,1,1)] = [1, t, 2+t]$$

$$[1, t, 3+t] \underset{t\neq 0}{=} \left[\frac{1}{t} : 1 : \frac{3+t}{t}\right] \quad t \to \infty$$

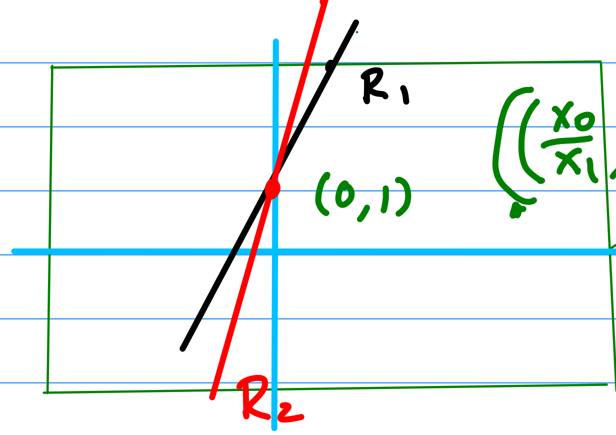
$$[1 : t : 2+t] = \left[\frac{1}{t} : 1 : \frac{2+t}{t}\right] \longrightarrow [0, 1, 1]$$

Si R_1 y R_2 son las rectas anteriores, como se ven en el afín $(\mathbb{C}^n)$ $x_1 \neq 0$

$[X_0 : X_1 : X_2]$, $X_1 \neq 0 \rightsquigarrow \frac{X_0}{X_1}, \frac{X_2}{X_1}$

$R_1: \left[\frac{1}{t} : 1 : \frac{2}{t}+1\right] = [\underbrace{\lambda} : 1 : 1+\underbrace{2\lambda}]$

$R_2: \left[\frac{1}{t} : 1 : \frac{3}{t}+1\right] = [\lambda : 1 : 1+3\lambda]$



$\left(\left(\frac{X_0}{X_1}, \frac{X_2}{X_1}\right)\right) = (y_1, y_2)$

$X_1 \neq 0$

$[0:1:1]$

$$(y_1, y_2) \longmapsto \left(\overset{z_1}{\overset{\shortparallel}{y_1^{-1}}}, \frac{\overset{z_2}{\overset{\shortparallel}{y_2}}}{y_1}\right)$$

$\mathbb{P}^n$

Def: Si $F \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ es un polinomio homogéneo definimos

$$V_{\mathbb{P}}(F) = \{ [\alpha] \in \mathbb{P}^n : F(\alpha) = 0 \}$$

Obs: (a) $V_{\mathbb{P}}(F)$ está bien definido

(b) F NO ES una función en $\mathbb{P}^n$

$F([\alpha]) = F(\alpha)$

$[\alpha] = [\alpha_0 : \dots : \alpha_n]$, $F(X_0, \dots X_n)(\alpha) = F(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \neq$

$[\alpha] = [t\alpha]$, $F(X_0, \dots X_n)(t\alpha) = F(t\alpha_0, \dots, t\alpha_n) = t^d \underbrace{F(\alpha_0, \dots \alpha_n)}_{\mathbb{C}}$

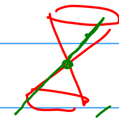
Si $F(\alpha) = 0 \Rightarrow \underset{t^d F(\alpha)}{\overset{\shortparallel}{F(t\alpha)}} = 0$ $\forall t \in \mathbb{C}$ así que $V_{\mathbb{P}}(F)$ está bien definido

Def: Si $I \subseteq \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ es un ideal homogéneo, definimos

$$\underbrace{V_{\mathbb{P}}(I)}_{\text{Subconjuntos algebraicos de } \mathbb{P}^n} = \{ [\alpha] \in \mathbb{P}^n : F(\alpha) = 0 \quad \forall F \in I, \ F \text{ homogéneo} \}$$

Ejercicio: Demuestre que los subconjuntos algebraicos de $\mathbb{P}^n$ son los cerrados de una topología (de Zariski) en $\mathbb{P}^n$.

Obs: Si $Z \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ es un cono



$\{[z] : z \in Z\} \subseteq \mathbb{P}^n$ es un conjunto alg de $\mathbb{P}^n$

$$\{[z] : z \in Z\} = V_{\mathbb{P}}(\mathcal{I}(Z))$$

es homogéneo porque Z es cono.

Por eso conocemos muchos ejemplos de conjuntos algebraicos de $\mathbb{P}^n$.

$$\mathbb{P}(V) := \left(V \setminus \{\vec{0}\} \right) / \sim$$

$$\vec{u} \sim \vec{v} \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \lambda \vec{u} = \vec{v}$$

$$\text{Si } A \underset{\text{subespacio vectorial}}{\subseteq} V \implies \mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(V)$$

Ejercicio: ([Variedades Lineales])

$$\{ V_{\mathbb{P}}(I) \text{ para } I \subseteq \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n] \text{ generado por formas lineales} \}$$

$$\|$$

$$\underbrace{\{ \mathbb{P}(A) : A \underset{\text{subespacio vectorial de}}{\subseteq} V \}}_{\text{Subespacios proyectivos}}$$

(Morfismo) $F_i \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ homogéneos de grado d

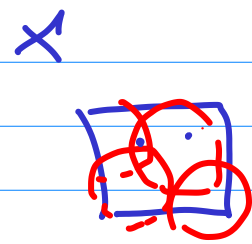
Def: Sean $X \subseteq \mathbb{P}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ variedades y $\phi = (F_0(x_0,\dots,x_n), \dots, F_m(x_0,\dots,x_n))$ tales que $V_{\mathbb{P}}(F_0,\dots,F_m) \cap X = \emptyset$. Entonces

(1) La función

$$X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^m$$
$$[\alpha] \longmapsto [F_0(\alpha) : \dots : F_m(\alpha)]$$

está bien definida ✓

(2) Si $\phi(X) \subseteq Y$, ϕ es un morfismo de X a Y.



* $\boxed{\text{Comentario:}}$ Una variedad algebraica es un conjunto algebraico X junto con un haz de funciones regulares "algebraicas" (que nos permiten describir $\varphi : U \subseteq X \to \mathbb{C}$ regulares)

Un morfismo $\varphi : X \to Y$ es una función continua que es "compatible" con el concepto local de función regular en X, Y.

Ejemplo:

Def: Si $[v_1], \dots, [v_k] \in \mathbb{P}^n$, el espacio proyectivo generado por $\{[v_1], \dots, [v_k]\}$ es

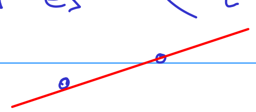
$$\left\{ [\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k] : \begin{array}{l} \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C} \\ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \neq 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{P}^n$$

$$\parallel$$

$$\langle [v_1], \dots, [v_k] \rangle$$

Demuestra que $\langle [v_1], \dots, [v_k] \rangle \cong \mathbb{P}^t$ para algún t $(t = \dim(\langle v_1, \dots, v_k \rangle) - 1)$.

Caso especial $[u] \neq [v]$, la línea que une $[u]$ y $[v]$ es $\langle [u][v] \rangle \cong \mathbb{P}^1$



$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{\vec{0}\} & & q^{-1}(X) \\ \downarrow q & & \\ \mathbb{P}^n & \supseteq & X \end{array}$$

Teorema [Nullstellensatz Proyectivo]

$$\left\{ \begin{array}{c} I \subseteq \mathbb{C}[x_0,\dots,x_n] \\ I \text{ homogéneo radical} \\ I \subseteq (x_0,\dots,x_n) \end{array} \right\} \underset{\longleftarrow}{\overset{V_{\mathbb{P}}(I)}{\longrightarrow}} \left\{ \begin{array}{c} \text{Subconjuntos algebraicos} \\ X \subseteq \mathbb{P}^n \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{I}(X) := \mathcal{I}(q^{-1}(X))$$

Ejercicio: Demostrar Nullstellensatz proyectivo.

Def: Si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es algebraico el "ANILLO DE COORDENADAS HOMOGÉNEAS DE X" es

$$\boxed{R_X := \mathbb{C}[x_0,\dots,x_n] \big/ \mathcal{I}(X)}$$

Obs: Como $\mathcal{I}(X)$ es homogéneo

$$\mathcal{I}(X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}(X)_k$$

$$\mathbb{C}[x_0,\dots,x_n] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}[x_0,\dots,x_n]_k$$

$$R_X = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \left(\mathbb{C}[x_0,\dots,x_n]_k \big/ \mathcal{I}(X)_k \right)$$

Ejercicio: Demostrar que R_X es un anillo graduado. Es decir, que si definimos

$$(R_X)_j := \left[\mathbb{C}[x_0,\dots,x_n]_j \big/ \mathcal{I}(X)_j \right]$$

entonces

(1) Como espacio vect. $R_X = \bigoplus_{k=0}^{\infty} (R_X)_k$

(2) $(R_X)_j \cdot (R_X)_t \subseteq (R_X)_{j+t}$.