Hoy: Intro. a geometría algebraica / $\mathbb{C}$ $(+,\cdot)$ $\mathbb{C}$-álgebra ← R es una

Sea $R = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ = "Polinomios con coef $\mathbb{C}$ en $x_1,\dots,x_n$"

Def: Si $f_1,\dots,f_m \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$

$$\underbrace{V(\{f_1,\dots,f_m\})}_{\substack{\text{soluciones en } \mathbb{C}^n \\ \text{de } f_1=0 \\ \vdots \\ f_m=0}} = \{\alpha \in \mathbb{C}^n : f_i(\alpha)=0 \ \forall i\}$$

"cerrado de Zariski"

Def: $X \subseteq \mathbb{C}^n$ es algebraico si $\exists f_1,\dots,f_m$:
$X = V(\underbrace{f_1,\dots,f_m})$.

Ejercicio: (1) $X \subseteq \mathbb{C}$ es alg $\iff$ $X=\emptyset$, $X=\mathbb{C}$ ó $|X|<\infty$.

(2) Encuentre un $X \subseteq \mathbb{C}^2$ cerrado (en la top métrica) que no sea algebraico.

Ejercicio: (a) Demuestre que $\mathcal{A} := \{X \subseteq \mathbb{C}^n : X \text{ es algebraico}\}$ satisface:

(1) $\emptyset, \mathbb{C}^n \in \mathcal{A}$
(2) Si $A,B \in \mathcal{A} \Rightarrow A\cup B \in \mathcal{A}$
(3) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $A_\alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \in \mathcal{A}$.

→ Son los cerrados de una topología en $\mathbb{C}^n$ llamada topología de Zariski

(b) (V ó F) Topología de Zariski en $\mathbb{C}^2$ $\overset{?}{=}$ topología producto de dos Zariski en $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C}^2 = \underbrace{\mathbb{C}}_{Z} \times \underbrace{\mathbb{C}}_{Z}$$

PREGUNTA 1: Cómo son las ecuaciones que definen un conjunto algebraico X?

Def: $I \subseteq \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ es un ideal ssi:

(1) I es un subespacio vectorial (cerrado bajo suma y mult por $\mathbb{C}$)

(2) $\underset{\{g\cdot j : j\in I\}}{gI} \subseteq I \quad \forall g \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$

Ejemplo: Si $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$

$$(f_1, \dots, f_m) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} g_i f_i \ : \ g_i \in \mathbb{C}[x_1 \dots x_n] \right\}$$

Obs: $(f_1, \dots f_m) \subseteq \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$ es un ideal

$$\sum g_i^{(1)} f_i + \sum g_i^{(2)} f_i = \sum (g_i^{(1)} + g_i^{(2)}) f_i$$

$$h \left(\sum g_i f_i \right) = \sum (h g_i) f_i$$

Ejercicio: $(f_1, \dots, f_m) = \bigcap_{J:\ J \text{ es ideal},\ J \supseteq \{f_1 \dots f_m\}} J$ — ideal generado por $f_1, \dots, f_m$.

Teorema (de la base de Hilbert)

Si $I \subseteq \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$ es un ideal entonces existen $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$:

$$I = (f_1, \dots f_m)$$

"Todo ideal es finitamente generado"

Obs: Para $S \subseteq \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$

$$V(S) = \{ \alpha \in \mathbb{C}^n : f(\alpha) = 0 \ \forall f \in S \}$$

$$V(S) = V((S)) = V(f_1 \dots f_m)$$

(S): ideal — intersección de todos los ideales que contienen a S.

Todo conjunto algebraico está descrito por finitas ecuaciones. (¡INFINITAS!)

Obs: El mismo X puede tener muchas descripciones

$X = V(x) = V(x^2)$ en $\mathbb{C}[x, y]$

$(x) \not\supseteq (x^2)$

para conseguir esto buscamos el conjunto más grande de ecuaciones para X,

Def: Si $X \subseteq \mathbb{C}^n$ definimos

$$\mathcal{I}(X) = \{ g \in \mathbb{C}[x_1 \dots x_n] : g(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in X \}$$

Obs: $\mathcal{I}(X)$ es un ideal

$g^{(1)}, g^{(2)} \in \mathcal{I}(X)$ $\quad (g^{(1)} + g^{(2)})(\alpha) = g^{(1)}(\alpha) + g^{(2)}(\alpha) = 0 + 0 = 0 \quad \forall \alpha \in X$

$\Rightarrow g^{(1)} + g^{(2)} \in \mathcal{I}(X)$

$h \in \mathbb{C}[\vec{x}]$, $g \in \mathcal{I}(X)$ $\quad (h \cdot g)(\alpha) = h(\alpha) g(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in X$

$h \cdot g \in \mathcal{I}(X)$

(*) Para $h \in \mathbb{C}[\vec{x}]$ si $h^n \in \mathcal{I}(X) \Rightarrow h \in \mathcal{I}(X)$.

Dem: Sea $\alpha \in X$

$0 = h^n(\alpha) = \underbrace{h(\alpha) h(\alpha) \cdots h(\alpha)}_{n\text{-veces}} \overset{\mathbb{C} \text{ cuerpo}}{\Longrightarrow} h(\alpha) = 0$

$\mathcal{I}(X) = \sqrt{\mathcal{I}(X)}$
"$\mathcal{I}(X)$ es un ideal radical"

$\Rightarrow h \in \mathcal{I}(X)$

Def: Sea $I \subseteq \mathbb{C}[x_1,..,x_n]$ un ideal

$$\sqrt{I} = \{ g \in \mathbb{C}[x_1,..,x_n] : \exists m \in \mathbb{N} : g^m \in I \}$$

Obs: $\sqrt{I}$ es ideal y $\sqrt{I} \supseteq I$

Teorema: [Nullstellensatz de Hilbert]
(de los ceros)

$$\left\{ \begin{array}{l} X \subseteq \mathbb{C}^n \\ X \text{ algebraico} \end{array} \right\} \underset{V(I)}{\overset{\mathcal{I}(X)}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{l} I \subseteq \mathbb{C}[x_1,..,x_n] \\ \text{ideal} \\ \text{radical} \end{array} \right\}$$

"$\mathcal{I}$ y V voltean inclusiones"

son inversas una de la otra.

más generalmente:

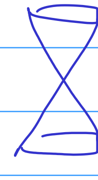
$Y \subseteq \mathbb{C}^n$ $\qquad V(\mathcal{I}(Y)) = \overline{Y}$ — clausura de Zariski

$J \subseteq \mathbb{C}[x_1,..,x_n]$ ideal $\qquad \mathcal{I}(V(J)) = \sqrt{J}$ — radical de J.

Pregunta 2: Como la geometría de X influencia la estructura de $\mathcal{I}(X)$?
Empezamos con las simetrías.

$\boxed{\text{Def:}}$ $X \subseteq \mathbb{C}^n$ conjunto algebraico,
X es un "cono" si

$$\forall t \in \mathbb{C}^* \; \forall v \in X \quad t \cdot v \in X$$



"La acción de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^n$ es una simetría de X $\quad t \mapsto \rho(t) : \begin{array}{l} \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \vec{v} \longmapsto t\vec{v} \end{array}$ "
$\mathbb{C}^* \to GL(\mathbb{C}^n)$

Si $g \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ este se puede escribir de manera única como suma de sus componentes homogéneas $g = g_3 + g_2 + g_0$

$$g = \underbrace{3xyz + ix^2y}_{g_3} + \underbrace{xy + z^2}_{g_2} + \underbrace{1}_{g_0}$$

Def: $g \in \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$ es homogéneo de grado d $\iff \forall t \in \mathbb{C}^*$ $g(t\vec{x}) = t^d g(\vec{x})$

$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]_d :=$ "polinomios homogéneos de grado d"

$= \langle x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} : a_1 + \dots + a_n = d \rangle$ como esp vectorial

$$\dim(\mathbb{C}[x_1..x_n]_d) = \binom{n+d-1}{d}$$ Ejercicio

Como espacio vectorial

$$\underset{R}{\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \underset{R_j}{\mathbb{C}[x_1..x_n]_j}$$

R es un anillo graduado.

$m : R_j \times R_t \longrightarrow R_{j+t}$. $\forall j, t \in \mathbb{N}$

Def: $I \subseteq R$ es homogéneo si existen elementos homogéneos $g_1, \dots, g_s$:

$I = (g_1, \dots, g_s)$ $\quad (x^2 + xy, y^2) \subseteq \mathbb{C}[x,y]$

Las negativas son equivalentes.

Ejercicio: (1) I es homogéneo

Def de homogéneo. (2) $g \in I$ y $g = g_d + \dots + g_0$ en componentes homogéneas $\Longrightarrow g_j \in I \ \forall j$

(3) Si $I_j := I \cap R_j \ \forall j \in \mathbb{N}$

$$I = \bigoplus_{j=0}^{\infty} I_j$$

$\dim(I_j) = j$

Ej: $(x) \subseteq \mathbb{C}[x,y]$ $=$ (0) $\langle x \rangle$ $\langle x^2, xy \rangle$ $\langle x^3, x^2y, xy^2 \rangle \dots$

$\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

Lema: $X \subseteq \mathbb{C}^n$ es CONO $\iff$ $\mathcal{I}(X)$ es un ideal homogéneo.

Dem: "$\Leftarrow$" Si $\mathcal{I}(X)$ es homogéneo

$\mathcal{I}(X) = (g_1, \dots, g_t)$ con g_i homogéneos de grado d_i. $X = V(\mathcal{I}(X))$

Tome $v \in X$, $t \in \mathbb{C}^*$

Af: $tv \overset{?}{\in} X$. Chequeamos que $tv \in V(\mathcal{I}(X))$

$$g_i(tv) = t^{d_i} g(v) = 0 \quad \forall i$$

luego $tv \in X$.

"$\Rightarrow$" $g \in \mathcal{I}(X)$, $g = g_d + \dots + g_0$ descomposición en componentes homogéneas, $v \in X$, $t \in \mathbb{C}^*$

$$\left[\, 0 = g(t\vec{v}) = t^d g_d(\vec{v}) + \dots + t g_1(\vec{v}) + g_0(\vec{v}) \,\right]$$

$\underline{\forall t \in \mathbb{C}^*}$. "$\Longrightarrow$" $g_j(\vec{v}) = 0 \quad \forall j$

Sol 1:
Derivando contra t d-veces obtenemos

$$d!\, g_d(\vec{v}) = 0 \Rightarrow g_d(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v}.$$

$$\Rightarrow g_d \in \mathcal{I}(X)$$

$g - g_d \in \mathcal{I}(X)$ ... repito d veces $g \in \mathcal{I}(X)$.

Sol 2: Tome $t_1, t_2, \dots, t_{d+1} \in \mathbb{C}^*$ distintos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} t_1^d & t_1^{d-1} & \cdots & 1 \\ t_2^d & t_2^{d-1} & \cdots & 1 \\ & \vdots & & \\ t_{d+1}^d & \cdots & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Van der Monde}} \begin{bmatrix} g_d(v) \\ \vdots \\ g_0(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det() = \prod_{i<j} (t_i - t_j) \neq 0$$