Hoy: Intro a la geometría alg. parte 2.

Recuerde que (Hilbert) hay una correspondencia biyectiva entre

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Conjuntos algebraicos}\\ X \subseteq \mathbb{C}^n\end{array}\right\} \underset{V(I)}{\overset{\mathcal{I}(X)}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c}\text{Ideales radicales}\\ I \subseteq \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]\end{array}\right\}$$

Más generalmente:

$W \subseteq \mathbb{C}^n \qquad V(\mathcal{I}(W)) = \overline{W}$ ← de Zariski

$J \subseteq \mathbb{C}[x_1 \dots x_n] \qquad \mathcal{I}(V(J)) = \sqrt{(J)}$

Teorema: $X \subseteq \mathbb{C}^n$ es cono $\iff$ $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathbb{C}[x_1, x_n]$ es homogéneo.

$(\forall t \in \mathbb{C}^* \ \forall \vec{x} \in X \ t\vec{x} \in X)$

["Simetrías de X" $\longleftrightarrow$ "Estructura adicional en $\mathcal{I}(X)$"]

Suponga que $\mathbb{C}^n = V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$

y asuma que V es una representación de un grupo G.

(i.e. tenemos un homomorfismo de grupos fijo

$$\rho_V : G \longrightarrow GL(V) \ )$$

Esto implica que $\mathrm{Fun}(V, \mathbb{C})$ son una G representación con la acción contragradiente definida así:

$$\rho^* : G \longrightarrow GL(\mathrm{Fun}(V, \mathbb{C}))$$

$$g \mapsto \left(f \longmapsto f \circ \rho(g)^{-1} \right)$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & \mathbb{C} \\ V \arrow[ur, dashed, "\rho^*(f) = f \circ \rho(g)^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Ejercicio: Demuestre que $(\mathrm{Fun}(V, \mathbb{C}), \rho^*)$ es una rep de G. (¿funcionaría sin el -1?)

Más aún ρ^* manda polinomios a polinomios, es decir $\mathrm{Sym}^\bullet(V^*) :=$ "Polinomios en $x_1, \dots x_n$ duales a los e_i" $x_j(e_i) = \delta_{ij}$ son una representación.

Notación: $S^\circ(V)$, $S^k(V)$

Ejercicio: Demostrar que

$$\mathrm{Sym}^\circ(V^*) \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^k(V^*)$$

Álgebra simétrica — isomorfismo de reps.

$\mathrm{Sym}^k(V^*) =$ "Polinomios homogéneos de grado k"

$=$ "k-Tensores simétricos"

$$V^* \xrightarrow{\rho^*(g)} V^* \longmapsto \left[\mathrm{Sym}^k(V^*) \xrightarrow{\mathrm{Sym}^k(\rho^*(g))} \mathrm{Sym}^k(V^*)\right]$$

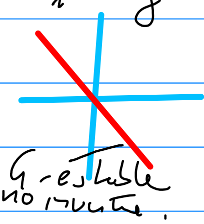
Hay que demostrar que $\mathrm{Sym}^k(\rho^*) = (\rho^*$ en polinomios de grado $k)$

Def: $W \subseteq \mathbb{C}^n$ es G-estable $\iff$ $\forall g \in G \; \forall \vec{w} \in W \;\; \rho(g)(w) \in W$

$\forall g \in G \, [\rho(g)(W) \subseteq W]$

Obs: "invariante" $\rho(g)(w) = w$.

$x \leftrightarrow y$



Ejercicio: Si W es G-estable $\Rightarrow \overline{W}$ es G-estable

Teorema: Si un subconjunto algebraico $X \subseteq V$ es G-estable $\Rightarrow \mathcal{I}(X) \subseteq S^\circ(V^*)$ es una subrepresentación de G.

Dem: $\mathcal{I}(X)$ es ideal y por ello un subespacio vectorial. Nos falta probar solo que $\mathcal{I}(X)$ es un subconjunto G estable de $S^\circ(V^*)$ (bajo la acción contragradiente de G).

Sea $f \in \mathcal{I}(X)$, $x \in X$, $g \in G$

$$\rho^*(g)(f)(x) \overset{?}{=} f(\rho(g)^{-1}x) = f(\rho(g^{-1})x) \overset{=}{} f(y) = 0$$

$y = \rho(g^{-1})x \in X$ porque X G-estable

luego $\rho^*(g)(f) \in \mathcal{I}(X)$.

Método para encontrar ecuaciones:

reductivo

Suponga que X es cono y G-estable para algún G.

Cómo encontrar ecuaciones para X?

$$\mathcal{I}(X)_k = \underbrace{\mathcal{I}(X) \cap Sym^k(V^*)} \subseteq Sym^k(V^*)$$

subrep.

(1) Descomponga $Sym^k(V^*)$ en irreps

$$\left[Sym^k(V) \cong \left(V_1^{\oplus a_1}\right) \oplus \cdots \oplus \left(V_m^{\oplus a_m}\right) \right.$$

, V_i irreducibles pequeño. no isomorfos entre sí.

(2) Busco elementos de $\left[\mathcal{I}(X) \cap \left(V_j^{\oplus a_j}\right)\right]$

Obs: Si $a_j = 1$

$$\mathcal{I}(X) \cap V_j \in \{0, V_j\}$$

basta chequear un elemento cualquiera de V_j para saber la intersección.

Ejemplo: Sean A^*, B^* e.v.

$$W = \{ T \in A^* \otimes B^* \text{ de rango } 1 \}$$

$\exists\ (a_1^*, b_1^*) \in A^* \times B^*$, $T = [a_1^* \otimes b_1^*]$.

Encuentre ecuaciones.

Obs 1: Sea $G = GL(A^*) \times GL(B^*)$ note que G actúa en $[A^* \otimes B^*]$ así:

$$\rho_G(g_A, g_B)(a^* \otimes b^*) = g_A(a^*) \otimes g_B(b^*)$$

W es G-estable porque G envía descomponibles en descomponibles.

y W es cono porque $t \cdot (a^* \otimes b^*) = (ta^*) \otimes b^* \in W$

por el Teorema $\mathcal{I}(W) \subseteq Sym^\bullet((A^* \otimes B^*)^*)$

$$= Sym^\bullet(A \otimes B)$$

subrepresentación.

Paso 1: $\left[\mathrm{Sym}^2(A\otimes B) \text{ como } \underset{\displaystyle G}{\overset{GL(A)\times GL(B)}{\|}} \text{-módulo?} \right]$

Ejercicio: Demuestre que:

(1) $\mathrm{Sym}^2(V)$ y $\Lambda^2 V$ son reps irreducibles de $GL(V)$. ($*\mathrm{Sym}^k(V)$, $\Lambda^k V$ $\forall k$)

(2) Si V_1 es irred de G_1, V_2 es irred. de G_2 $\Rightarrow$ $V_1\otimes V_2$ es irred de $G_1\times G_2$

Lema: $\mathrm{Sym}^2(A\otimes B) \cong \underbrace{\left[S^2(A)\otimes S^2(B)\right]}_{V_1} \oplus \boxed{\underbrace{\left[\Lambda^2 A\otimes \Lambda^2 B\right]}_{V_2}}$

menores 2×2.

$$\left[\Lambda^2 A = \left(\overset{\varphi}{\Lambda^2(A^*)}\right)^*\right]$$

$$\begin{tikzcd}
A^*\times A^* \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \Lambda^2 A^* \arrow[dl, "\varphi"] \\
\mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

α bi-lineal y alternante

$\alpha(a_1, a_2)$

$$\mathrm{Sym}^2(A\otimes B) = \left(\overset{\psi}{\mathrm{Sym}^2(A^*\otimes B^*)}\right)^*$$

$$\begin{tikzcd}
(A^*\otimes B^*)\times(A^*\otimes B^*) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "T"'] & S^2(\;) \arrow[dl, "\psi"] \\
\mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

T bi-lineal simétrico

$T(a_1^*\otimes b_1^*, a_2^*\otimes b_2^*)$

$\beta : B^* \times B^* \longrightarrow \mathbb{C}$
bilineal alternante

$$\underbrace{\Lambda^2 A}_{\alpha} \otimes \Lambda^2 B \xrightarrow{\quad L \quad} \operatorname{Sym}^2(A \otimes B)$$

$\alpha : A^* \times A^* \to \mathbb{C}$
bilineal alternante

$T : (A^* \otimes B^*) \times (A^* \otimes B^*) \longrightarrow \mathbb{C}$
bilineal simétrico

$$T(a_1^*, b_1^*, a_2^*, b_2^*) = \alpha(a_1^*, a_2^*) \cdot \beta(b_1^*, b_2^*)$$

4-lineal

Simétrico ✓
bi-lineal

$$T\left(a_1^{(1)} \otimes b_1^{(1)} + a_1^{(2)} \otimes b_1^{(2)},\ a_2 \otimes b_2\right) =$$

$$\begin{tikzcd}
A^* \times B^* \times A^* \times B^* \arrow[r] \arrow[d, "4\text{-lineal}"'] & A^* \otimes B^* \otimes A^* \otimes B^* \arrow[dl, "\text{Lineal}"'] \\
\mathbb{C} & \\
(A^* \otimes B^*) \times (A^* \otimes B^*) \arrow[u, "\text{bi-lineal}"] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

$$L(\alpha, \beta) = T$$

Desciende a mapa lineal

$$L : \Lambda^2 A \otimes \Lambda^2 B \longrightarrow \operatorname{Sym}^2(A \otimes B)$$

$\boxed{\text{Af:}}$ L es morfismo de $GL(A) \times GL(B)$ reps.
$L \neq 0$. $\operatorname{im}(L)$