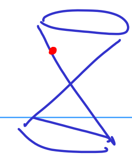


Teorema [Terracini] Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad irreducible no contenida en ningún hiperplano. Si $k \in \mathbb{N}$ y $[p_1],\dots,[p_k]$ son puntos genéricos de X entonces

$$\vec{v} \in \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \qquad \hat{X} = q^{-1}(X) \cup \{0\}$$

$$[\vec{v}] \in \mathbb{P}^n \supseteq X$$

$$T_{p_1+\dots+p_k}\widehat{\sigma_k(X)} = \langle T_{p_1}\hat{X},\dots,T_{p_k}\hat{X}\rangle$$

En particular $\dim(\sigma_k(X)) = \dim\langle\ \rangle - 1$

Ejemplo: [Border rank de Waring] (k, d, n)

Fijo $d, n \in \mathbb{N}$

$$X := \nu_d(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d V), \qquad \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$$

$$\dim(\sigma_k(X)) \overset{?}{=}$$

$[T] \in \sigma_k(X) \iff T$ tiene border rank de Waring $\leq k \iff$

T es un límite de sumas de potencias d-ésimas de formas lineales.

$$X \subseteq \underbrace{\sigma_2(X)} \subseteq \underbrace{\sigma_3(X)} \subseteq \dots \subseteq \underbrace{\sigma_N(X)} = \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d)$$

dimensiones?

$$\dim(\sigma_k(X)) \leq k\dim(X) + (k-1)$$

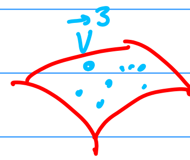
Ej: $\begin{bmatrix} n=1 \\ \langle e_0, e_1\rangle \end{bmatrix}$ $d=3$ $\quad \vec{v} = a e_0 + b e_1 \quad [\vec{v}^3]$ $(a e_0 + b e_1)^3 =$

$= a^3 e_0^3 + 3a^2 b\, e_0^2 e_1 + \cancel{3}ab^2 e_0 e_1^2 + b^3 e_1^3$

$V = \langle e_0, \dots, e_n \rangle$

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^d(V) \\ \vec{v} & \longmapsto & v^d \\ [a:b] & \longrightarrow & [a^3 : a^2 b : ab^2 : b^3] \end{array}$$

dim? $\quad X = \nu_d(\mathbb{P}(V))$



$$\sigma_2(X) = \overline{\bigcup_{p_1, p_2 \in X} \langle p_1, p_2 \rangle} = \bigcup_{v_1, v_2} \{\lambda_1 v_1^d + \lambda_2 v_2^d\}$$

$[T]$

Caso especial $(n=1)$ $\quad X =$ Rational normal curve $= \nu_d(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^d$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^d \\ [s:t] & \longrightarrow & [s^d : s^{d-1} t : \dots : t^d] \end{array}$$

$\dim(\sigma_k(X))$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{3+1} \\ (s,t) & \longmapsto & (s^3, s^2 t, s t^2, t^3) \end{array}$$

$T_{(s_1,t_1)} X = \mathrm{im}(DF(s_1,t_1))$

$DF(s_2, t_2)$

$$DF = \begin{array}{c|cc} & s & t \\ \hline s^3 & 3s^2 & 0 \\ s^2 t & 2st & s^2 \\ s t^2 & t^2 & 2st \\ t^3 & 0 & 3t^2 \end{array}$$

$$DF(s_1,t_1) = \begin{bmatrix} 3s_1^2 & 0 \\ 2s_1 t_1 & s_1^2 \\ t_1^2 & s_1^2 \\ 0 & 3t_1^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3s_2^2 & 0 \\ 2 s_2 t_2 & s_2^2 \\ t_2^2 & s_2^2 \\ 0 & 3t_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\sigma_2(X)) \overset{?}{=} rk[\quad][\quad] - 1$$

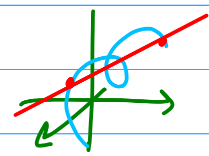
$X \subseteq \mathbb{P}^d$

$$\dim(\sigma_k(X)) \leq k \cdot 1 + k - 1 = 2k-1$$

$$\leq \underbrace{\min(2k-1,\ d)}_{\text{dimensión esperada}}$$

$d=3$ $\quad X=\nu_3(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^3$

$\dim(\sigma_2(X))=3$



→ Un polinomio cúbico en dos variables general es suma de 2 potencias cúbicas de formas lineales.

$$\underbrace{p(s,t)}_{\text{grado } 3} = \ell_1^3 + \ell_2^3$$

$$\begin{array}{ccc} X & \subseteq & \sigma_2(X) \\ \| & & \| \\ \sigma_1(X) & & \mathbb{P}^3 \\ 1 & & 3 \end{array}$$

$X=\nu_4(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^4$

$$\begin{array}{ccccc} X=\sigma_1(X) & \subseteq & \sigma_2(X) & \subseteq & \sigma_3(X) \\ & & \| & & \| \\ 1 & & 3 & & 4 \quad \mathbb{P}^4 \\ 2\cdot 1 - 1 \checkmark & & 2\cdot 2-1 \checkmark & & \end{array}$$

$X=\nu_5(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^5$ $\quad$ T polinomio de grado 5 general es suma de 3 $[T = \ell_1^5 + \ell_2^5 + \ell_3^5.]$

$$\begin{array}{ccccc} X=\sigma_1(X) & \subseteq & \sigma_2(X) & \subseteq & \sigma_3(X) \\ 1 & & 3 & & 5 \end{array}$$

Siempre basta 6 potencias
$d+1$

$X = \nu_6(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^6$

$$X = \sigma_1(X) \subseteq \sigma_2(X) \subseteq \sigma_3(X) \subseteq \sigma_4(X)$$
$$\underset{1}{} \qquad \overset{\shortparallel}{3} \qquad \overset{\shortparallel}{5} \qquad \overset{\shortparallel}{6}$$

[Idea: $\dim(\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^1))) \overset{?}{=} \underbrace{\min(2k-1, d)}_{\text{dimensión esperada}}$] No defectivos

Caso especial $d=2$ k,n?

$V = \langle e_0, \ldots, e_6 \rangle$ $\quad Sym^2(V) = \langle e_0^2, \ldots, e_6^2 \rangle$

$X = [\nu_2(\mathbb{P}^6)] \subseteq \mathbb{P}^{\binom{8}{2}-1} = \mathbb{P}^{27}$

$X \subseteq \mathbb{P}^{27}$

$\dim(\sigma_3(X)) \leq 3 \cdot 6 + 2 = 20$

$17 < 20$

Defecto secant

$\nu_2(\mathbb{P}^n) =$

Muy defectivo

Ejercicio: (1) Calcule $\dim[\sigma_k(\nu_2(\mathbb{P}^n))] =$ X

(2) Calcule la dimensión esperada.

(3) Verifique que X tiene tangentes defectuosas.

No olvide que $\nu_2(\mathbb{P}^n)$ se puede pensar así:

espacio de matrices simétricas, de rango 1

$$[a_0 : \ldots : a_n] \longmapsto \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_0 \ldots a_n] = \begin{bmatrix} a_0^2 & a_0 a_1 & \\ \vdots & & \\ a_n a_0 & \ldots & a_n^2 \end{bmatrix}$$

[$\sigma_k(\nu_2(\mathbb{P}^n)) =$ "Matrices simétricas de rango $\leq k$"]

(2) Queremos demostrar que

$$\dim(\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^1))) = \min(2k-1, d)$$

Nuestro objetivo es usar Terracini :

$$\langle T_{p_1}\hat{X}, \ldots, T_{p_k}\hat{X} \rangle \leftarrow$$ espacio vectorial (definido por ecuaciones lineales)

$$\{ H : \boxed{H \supseteq T_{p_j}\hat{X}}, j=1,\ldots,k \}$$

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^3 \qquad H = a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$$

$$[s:t] \longmapsto [s^3 : s^2t : st^2 : t^3]$$

$$\nu^*(H) = [a_0 s^3 + a_1 s^2 t + a_2 s t^2 + a_3 t^3]$$

Hiperplanos $\overset{\nu^*}{\rightsquigarrow}$ polinomios cúbicos.

$\boxed{* \text{ Af:}}$ $H \supseteq T_p\hat{X} \iff$ [$\nu^*(H)$ tiene una raíz doble en p.]

Si creemos esta afirmación entonces :

$$\dim\langle T_{p_1}\hat{X}, \ldots, T_{p_k}\hat{X}\rangle = (d+1) - \dim\{$$
$$q(s,t) \in \mathbb{C}[s,t] : \deg(q) = d \text{ y } q \text{ tiene raíces dobles en } p_1, \ldots, p_k \}$$

$$q(s,t) = a_0 s^d + a_1 s^{d-1}t + \ldots + a_d t^d$$

$$= a_0 s^d + a_1 s^{d-1} + \ldots + a_0$$

$$= \left[(s-p_1)^2 (s-p_2)^2 \cdots (s-p_k)^2 \underbrace{\overset{\downarrow}{r(s)}}_{\text{grado } d-2k} \right]$$

si $2k \leq d$

$$= d+1 - (d - 2k + 1)$$

$$= 2k \checkmark$$

$$\dim\left(\widehat{\sigma_k(X)}\right) = 2k$$

$$\dim(\sigma_k(X)) = 2k-1, \quad \text{si } 2k \leq d$$

$$\dim(\sigma_k(X)) = \min(2k-1, d)$$

$$s^2 - t^2 \rightsquigarrow s^2 - 1 = (s-1)(s+1)$$

$$\overset{\shortparallel}{(s-t)(s+t)}$$

Ejercicio: Demostrar la A_f *

Qué pasa con (n, k, d) arbitrario?

Teorema: [Alexander - Hirschowitz]

$$\dim(\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n))) = \text{esperada}$$

excepto en las siguientes excepciones:

(1) $d=2$, $2 \leq k \leq n$

(2) $d=3$, $n=4$, $k=7$

(3) $d=4$, $2 \leq n \leq 4$, $k = \binom{n+2}{2} - 1$

No hay un análogo para variedades de Segre de productos de espacios proyectivos

$$X = \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \times \mathbb{P}^c \times \mathbb{P}^d \subseteq \mathbb{P}(V_1 \otimes \dots \otimes V_4)$$

$$\dim(\sigma_k(X)) \stackrel{?}{=}$$