Hoy: (1) Terminar prueba del Teorema de variedades secantes
(2) Lema de Terracini (cómo calcular dim de variedades secantes)

X irreducible, no degenerada $X \subseteq \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$

Def:

$$\sigma_k(X) = \overline{\bigcup_{p_1,\dots,p_k \in X} \langle p_1, \dots, p_k \rangle}$$

Construcción:

$$\mathbb{P}(\Lambda^k V)$$
$$\cup\!|$$
$$\underbrace{X \times \dots \times X}_{k\text{-copias}} \dashrightarrow Gr(k-1, \mathbb{P}^n)$$

$\cup\!|$ abierto denso no vacío

$$W = \{(p_1,\dots,p_k) : p_1,\dots,p_k \text{ son lin. indeps}\} \xrightarrow{\varphi} Gr(k-1,\mathbb{P}^n)$$

$(p_1,\dots,p_k) \mapsto [p_1 \wedge \dots \wedge p_k]$

$$Z = \overline{\varphi(W)} \leftarrow S_k(X) - (k-1)\text{-planos secantes}$$

- Irreducible
- $\dim(Z) \leq \dim(W) = \dim(X \times \dots \times X) = k \dim X$

Cómo se relacionan $S_k(X) \subseteq Gr(k-1, \mathbb{P}^n)$
$\sigma_k(X) \subseteq \mathbb{P}^n$

$$Gr(k-1, \mathbb{P}^n) \times \mathbb{P}^n \supseteq \mathcal{U} = \{(\omega, v) : v \in L_\omega\} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{P}^n$$

$\downarrow \pi_1 \leftarrow$ haz vectorial de rango k

$Z \subseteq Gr(k-1, \mathbb{P}^n) \ni \omega$

$$\pi_2(\pi_1^{-1}(\omega)) = L_\omega$$

Af:

$$\pi_2(\pi_1^{-1}(Z)) = \sigma_k(X)$$

$\exists\ \mathcal{O}$ abierto $\subseteq Z$: $\forall o \in \mathcal{O}$

$\dim(\varphi^{-1}(o)) = \dim(W) - \dim(Z) \geq 0$

$$X \times \cdots \times X$$

$$\underset{\cup\!\!\mid}{W} \xrightarrow[\text{dominante}]{\varphi} Z$$

(por def. porque $Z = \overline{\varphi(W)}$)

Así que $[\varphi(W) \supseteq \mathcal{O}]$ abierto en Z.

$$[\pi_2(\pi_1^{-1}(Z)) = \Lambda]$$

$$[\sigma_k(X) = \overline{[\bigcup_{p_1 \dots p_k \in X} \langle p_1 \dots p_k \rangle]}]$$

denso

$$\cup\!\!\mid \qquad\qquad \cup\!\!\mid$$

$$\pi_2(\pi_1^{-1}(\mathcal{O})) = \bigcup_{\substack{p_1,\dots,p_k \in X \\ p_1 \dots p_k \text{ lin indep's} \\ (p_1 \dots p_k) \in \mathcal{O}}} (\langle p_1 \dots p_k \rangle)$$

$\Lambda = \sigma_k(X)$

$$\pi_1^{-1}(Z) \xrightarrow{\pi_1} Z$$

Fibras irreducibles y de la misma dimensión $\pi_1^{-1}(w) = L_w$ ($k-1$)

base irreducible

$\Rightarrow$ (1) $\pi_1^{-1}(Z)$ irreducible

(2) $\dim(\pi_1^{-1}(Z)) = \dim(Z) + (k-1)$

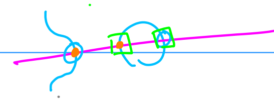
$\leq k \dim(X) + k - 1$

$$\sigma_k(X) = \pi_2(\pi_1^{-1}(Z))$$

- es irreducible
- $\dim(\sigma_k(X)) \leq k \dim X + k - 1$

$=$

Qué sucede si $\left[\dim(\widetilde{\sigma_k(X)}) = k \dim X + (k-1)\right]$



(1)

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{W} \qquad W \xrightarrow{\varphi} Z \subseteq Gr(k-1, \mathbb{P}^n)$$

$1 - - [\deg(\varphi)??]$

$\dim(W) = \dim(Z)$ ✓

"Casi todo $(k-1)$-plano es spaneado por finitos subconjuntos de X"

(2)

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{P}^n \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \\ Gr(k-1, \mathbb{P}^n) & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{P}^n \\ & & \cup \\ \pi_1^{-1}(Z) & \xrightarrow{\pi_2} & \sigma_k(X) \\ \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$$

$\dim(\pi_1^{-1}(Z)) = \dim(\sigma_k(X))$

"Casi todo $[p \in \sigma_k(X)]$ pertenece a finitos $(k-1)$-planos spaneados por X"

$Y \xrightarrow{g} Y'$, g dominante y $\dim(Y) = \dim(Y')$ $\Rightarrow$ $\exists\, \mathcal{O} \subseteq Y'$, $\mathcal{O} \neq \emptyset$, $\mathcal{O}$ abierto

$\dim(g^{-1}(o)) = \dim(Y) - \dim(Y') = 0$

$\left[\,|g^{-1}(o)| < \infty \quad \forall o \in \mathcal{O}\right]$

Para casi todo $y' \in Y'$, $|g^{-1}(y')| < \infty$

Si $\dim(\sigma_k(X)) = k(\dim X) + k-1 \Rightarrow$ Casi todo punto p con X-rank$(p) \leq k$ puede escribirse como spn de k puntos de FINITAS MANERAS. [A veces hay unicidad - Teorema de Kruskal - imp (*)]

Si $\dim(\sigma_k(X)) < k \dim X + (k-1)$

$\Rightarrow$ ó φ ó π_2 tienen fibra genérica de dimensión > 0.

$\Rightarrow$ Casi todo punto p con X-rank$(p) \leq k$ puede escribirse de infinitas maneras distintas como spn de k-puntos.

$X = \sigma_1(X) \subsetneq \sigma_2(X) \subsetneq \sigma_3(X) \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_t(X) = \mathbb{P}^n$

$[\dim(\sigma_j(X)) = j \dim X + (j-1)]$

Ejercicio: $X \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{C}^{mn})$

matrices de rango 1. $M^{m\times n}($

(a) Demuestre que $\dim(\sigma_k(X)) < [k \dim(X) + k - 1]$ $n)$

(b) De cuáles maneras se puede escribir una matriz de rango k como suma de matrices de rango 1?

Fibra de π_2.

Cómo calcular $\dim(\sigma_k(X)) \overset{?}{=}$

$$\begin{array}{ccc} \hat p & \vec v & \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow q \\ p & [\vec v] & \mathbb{P}^n \end{array}$$

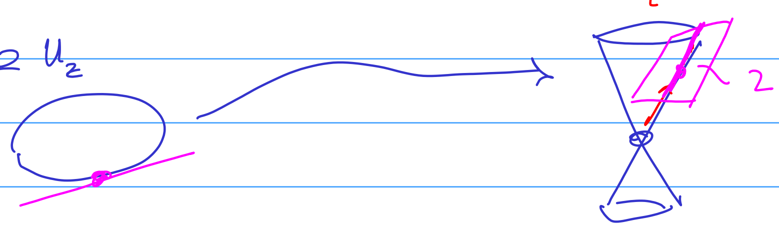
$\{0\} \cup q^{-1}(X) =: \hat X \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ $\quad \hat X = V_{\mathbb{C}^{n+1}}(I)$

Cono sobre X

$X \subseteq \mathbb{P}^n$ $\quad X = V_{\mathbb{P}}(I)$

En $\mathbb{P}^2$ $V_{\mathbb{P}}(x^2+y^2-z^2)$, En $\mathbb{C}^3$ $[V_{\mathbb{C}^3}(x^2+y^2-z^2)]$

$\mathbb{P}^2 \supseteq U_z$



Def: Si $\hat p \in \hat X \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$

$$\left[T_{\hat p} \hat X = \{ \alpha'(0) : \alpha: \mathbb{C} \longrightarrow \hat X \text{ es una curva diferenciable} \} \right]$$

$\boxed{\text{Lema:}}$ Si X es irreducible entonces $\hat X$ es irreducible y $\exists\, U \subseteq \hat X : \forall \hat p \in U$

(1) $T_{\hat p} \hat X = \ker(D_p F)$

(2) $\dim(T_{\hat p} \hat X) = \underbrace{\dim(\mathcal{O}_{X,p})}_{\dim X}+1$

Obs: Pasar a conos afines $\hat{X}$ se comporta muy bien respecto a variedades secantes

más precisamente

$$\underbrace{\hat{X} \times \cdots \times \hat{X}}_{k\text{-veces}} \xrightarrow{\text{Add}(\ )} \mathbb{C}^{(n+1)}$$

diferenciable sobreyectiva en abierto luego la derivada es sobre

$$\hat{\omega} \ni (v_1, \dots, v_k) \longmapsto v_1 + v_2 + \cdots + v_k$$

$$* \quad \text{Add}(\hat{\omega}) \overset{\subseteq}{=} q^{-1}\Big(\bigcup_{\substack{p_1 \dots p_k \\ \text{linealmente indep}}} \langle p_1, \dots, p_k \rangle \Big) \sim \hat{\sigma_k(X)}$$

De aquí concluimos si $v_1, \dots, v_k$ son puntos generales de $\hat{X}$ entonces

$$\left[T_{\text{Add}(v_1, \dots, v_k)} \hat{\sigma_k(X)} = \underbrace{\left[D\,\text{Add}\left(T_{v_1}\hat{X}, \dots, T_{v_k}\hat{X} \right) \right]}_{\text{fácil}} \right]$$

"$\subseteq$" $\quad q\big(\text{Add}(v_1 \dots v_k)\big) = [v_1 + \cdots + v_k] \in$

$$\langle [v_1], \dots, [v_k] \rangle \in \bigcup \langle\ \rangle \checkmark$$

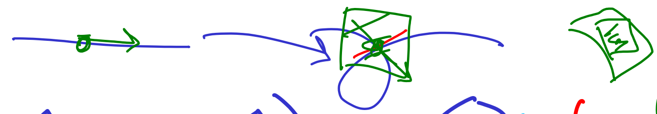
"$\supseteq$" $\quad [p] \in \langle [w_1], \dots, [w_k] \rangle$ con w_i lin indep.

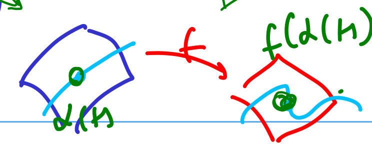
$$\Updownarrow$$

$$[p] = [\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_k w_k]$$

$$p = \lambda(\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_k w_k) = (\lambda\beta_1)w_1 + \cdots + (\lambda\beta_k)w_k$$

$$p = \text{Add}(\lambda\beta_1 \underline{w_1}, \dots, \lambda\beta_k \underline{w_k})$$





$\mathrm{DAdd}(T_{v_1}\hat{X}, \dots, T_{v_k}\hat{X})$

Como los v_i son no-singulares sabemos que

$$T_{v_i}\hat{X} = \{\alpha_i'(0) : \alpha_i : \mathbb{C} \longrightarrow \hat{X} \text{ es diferenciable}\}$$

$$\mathrm{Add}(\alpha_1(t), \dots, \alpha_k(t)) = \alpha_1(t) + \dots + \alpha_k(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1(t) + \dots + \alpha_k(t)\right)\Big|_{t=0} = \alpha_1'(0) + \dots + \alpha_k'(0) \quad \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

$$\mathrm{DAdd}(T_{v_1}\hat{X}, \dots, T_{v_k}\hat{X}) = T_{v_1}\hat{X} + \dots + T_{v_k}\hat{X}$$

Lema (Terracini)

$v_1, \dots, v_k$ son no singulares en $\hat{X}$
$v_1 + \dots + v_k$ no singular en $\widehat{\sigma_k(X)}$

Si $v_1, \dots, v_k$ son puntos generales de $\hat{X}$

$$T_{v_1 + \dots + v_k}\widehat{\sigma_k(X)} = T_{v_1}\hat{X} + \dots + T_{v_k}\hat{X}$$

en particular

$$\dim(\sigma_k(X)) = \dim(T_{v_1}\hat{X} + \dots + T_{v_k}\hat{X}) - 1$$