Construcción de variedades tóricas normales mediante pegamento: (1)

Sea N el retículo de subgrupos uniparamétricos de un toro T

(si $\dim(T)=d \Rightarrow N \cong \mathbb{Z}^d$ y pensamos en $(a_1,\dots,a_d)$ como el subgrupo

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\longrightarrow (\mathbb{C}^*)^d \\ t &\longmapsto (t^{a_1},\dots,t^{a_d}) \end{aligned}$$

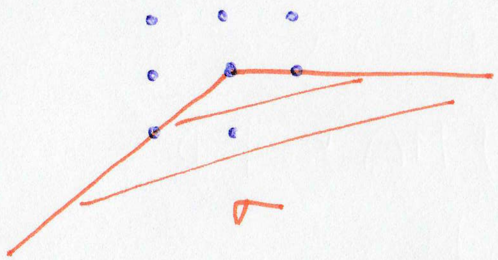
).

Recuerde que a un cono poliedal N-racional le asociamos una variedad tórica <u>afín</u> U_σ así:

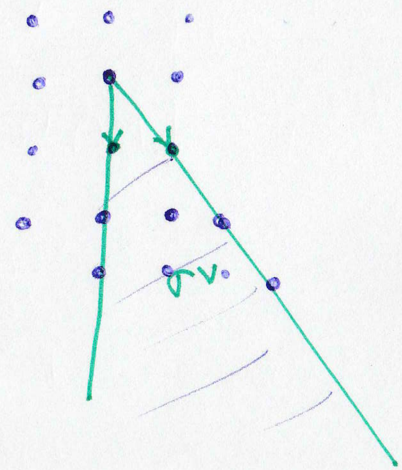
$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma \subseteq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \\ &U_\sigma = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]\right) \\ &\text{donde } \sigma^\vee = \{ m \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} : \langle m, u\rangle \geq 0 \ \forall u \in \sigma \} \end{aligned}}$$

Ejemplo:

N



M



$$U_\sigma = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[y^{-1}, xy^{-1}])$$

$$\sigma^\vee = \{ m \in M : \langle m, u \rangle \geq 0 \}$$

$\boxed{\text{Calcule:}}$

$$\{y^{-1} \neq 0\} \subseteq U_\sigma$$

$$\{xy^{-1} \neq 0\} \subseteq U_\sigma$$

$$\{xy^{-2} \neq 0\} \subseteq U_\sigma$$

Vimos que las órbitas de la accion de T sobre U_σ estan en correspondencia con las caras de σ. (recuerda como?)

Demostraremos que las caras de σ tambien estan en biyeccion con los ABIERTOS PRINCIPALES (complemento de los ceros de una sola función regular) QUE SON T-estables adentro de U_σ.

La idea es simple: Si $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau^\vee \geq \sigma^\vee$ y por lo tanto hay una inclusión $\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M] \overset{j^*}{\hookleftarrow} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$

y a nivel de espacios $U_\tau \xrightarrow{j} U_\sigma$ con imagen densa.

Demostraremos que $\boxed{\text{la imagen } j(U_\tau) \text{ es un abierto principal en } U_\sigma}$

Más precisamente, U_τ es canónicamente isomorfo al abierto de U_σ definido por $\{X \neq 0\}$ donde X es un testigo para la cara $\tau \leq \sigma$, es decir:

(i) $X \in \sigma^\vee$ (i.e. $\forall u \in \sigma \ \langle u, X \rangle \geq 0$)

(ii) $\tau = \{u \in \sigma : \langle u, X \rangle = 0\}$.

Mostraremos el siguiente Teorema:

$\boxed{\text{Teorema:}}$ Sea σ un cono poliedral N-racional en $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$

y sea $\chi \in \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ un caracter.

El abierto $\{\chi \neq 0\} \subseteq U_\sigma := \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$

es canonicamente isomorfo a $U_\tau := \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M])$

donde $\tau \subseteq \sigma$ es la cara de σ definida por χ, es decir

$$\tau := \{ u \in \sigma : \langle u, \chi \rangle = 0 \}$$

Obs: El Teorema anterior demuestra que hay una biyección

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Caras } \tau \leq \sigma \\ \text{en } N \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Abiertos principales} \\ T\text{-estables de} \\ U_\sigma \end{matrix} \right\}$$

$$\tau \longrightarrow U_\tau \subseteq U_\sigma$$

Dem del Teorema: Mostremos que $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]_\chi$ y $\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M]$ son álgebras (5)
canónicamente isomorfas, donde $\tau = \{ u \in \sigma : \langle u, \chi \rangle = 0 \}$.

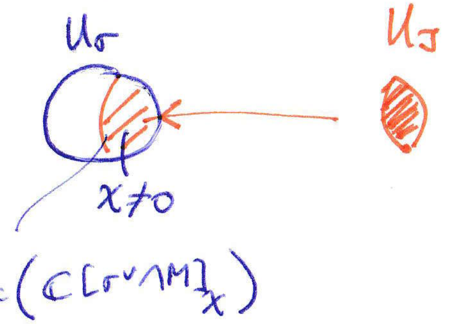
Por construcción $\tau \leq \sigma$ luego $\tau^\vee \supseteq \sigma^\vee$ y por ello hay una inclusión de

$$\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \xrightarrow{j^*} \mathbb{C}[\tau^\vee \cap M]$$ que es 1-1 luego

$$U_\sigma \longleftarrow U_\tau$$ tiene imagen densa.

Por definición de $\tau^\vee$ tanto χ como χ^{-1} son elementos de $\tau^\vee$
luego por la propiedad universal de la localización tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \arrow[r, "j^*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathbb{C}[\tau^\vee \cap M] \\ \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]_\chi \arrow[ur, dashed, "!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$



φ es 1-1 pues $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ es dominio. Mostremos que φ es sobreyectiva verificando
que $\underline{\text{Af}}$: $\tau^\vee \cap M = \sigma^\vee \cap M + \mathbb{Z}\chi$

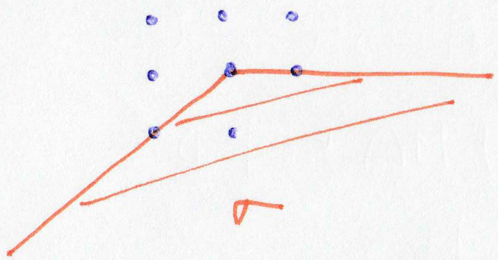
"$\supseteq$" ✓ "$\subseteq$" Mostremos la inclusión dual, es decir $(\tau^\vee \cap M)^\vee \supseteq (\sigma^\vee \cap M + \mathbb{Z}\chi)^\vee$

Si $u \in (\sigma^\vee \cap M + \mathbb{Z}\chi)^\vee \Rightarrow$ (i) $u \in (\sigma^\vee \cap M)^\vee = \sigma \cap N$
(ii) $\langle u, \chi \rangle \geq 0$ y $\langle u, -\chi \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle u, \chi \rangle = 0$ luego $u \in \tau \cap N$

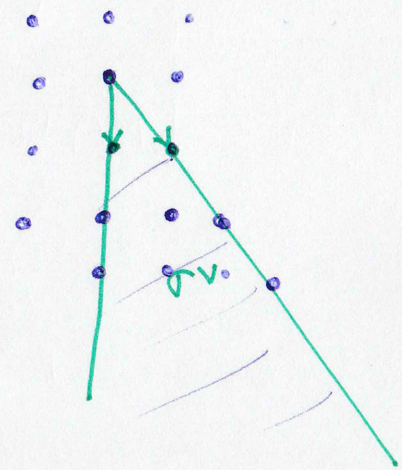
luego φ es isomorfismo.

Ejemplo:

N



M



$$U_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y^{-1}, xy^{-1}])$$

$$\sigma^\vee = \{ m \in M : \langle m, u \rangle \geq 0 \}$$

$\boxed{\text{Calcule:}}$

$$\{ y^{-1} \neq 0 \} \subseteq U_\sigma$$

$$\{ xy^{-1} \neq 0 \} \subseteq U_\sigma$$

$$\{ xy^{-2} \neq 0 \} \subseteq U_\sigma$$